BULLETIN
DE
L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Rédacteur en chef
K. KURATOWSKI

Rédacteur en chef suppléant
L. INFELD

SÉRIE DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

Rédacteur de la Série
A. MOSTOWSKI

Comité de Rédaction de la Série
K. BORSUK, W. IWANOWSKA, A. JABŁOŃSKI, W. RUBINOWICZ
A. SOŁTAN

VOLUME VII
NUMERO 7

VARSOVIE 1959

PRINTED IN POLAND

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – WARSZAWA, MIODOWA 10

Nakład 1110 + 140 egz.	*Rękopis dostarczono 1. VI. 1959*
Ark. wyd. 5,25, ark. druk. 6 1/4	*Podpisano do druku 28. IX. 1959*
Papier druk. sat. 70 gr. kl. III	*Druk ukończono w październiku 1959*
Format B5, 70×100 cm	*Zam. prod. 377/59 Cena zł 20.–*

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO W KRAKOWIE

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VII, No. 7, 1959

MATHEMATIK

Reduktion eines gruppentheoretischen Problems von O. J. Schmidt

von

F. SZÁSZ (Budapest)

Vorgelegt von K. BORSUK am 23 April 1959

Das folgende merkwürdige Problem wurde von O. J. Schmidt aufgeworfen: es sind alle unendliche Gruppen G zu bestimmen, deren sämtliche echte Untergruppen H endlich sind. Solche Gruppen nennen wir (nach einer ähnlichen Terminologie von L. Rédei) "einstufig unendliche" Gruppen, kurz EU-Gruppen. Es sei $C(p^\infty)$ die multiplikative Gruppe der Vereinigungsmenge aller p-ten, p^2-ten, ..., p^n-ten, ... komplexen Einheitswurzeln, wobei p eine feste Primzahl ist und $n = 1, 2, 3, \ldots$. Diese Gruppe lässt sich durch die Elemente $g_1, g_2, g_3, \ldots$ mit $g_1^p = 1$, $g_n = g_{n+1}^p$ erzeugen. $C(p^\infty)$ ist offenbar eine EU-Gruppe. Ob es andere Gruppen, abgesehen von den Gruppen $C(p^\infty)$, geben kann, ist ein schweres und bisher noch ungelöstes Problem der Algebra. Für Abelsche Gruppen folgt die Lösung dieses Problems aus wohlbekannten gruppentheoretischen Struktursätzen. Die Note [8] von Szélpál ist der expliziten Bestimmung der Abel'schen EU-Gruppen gewidmet. Szélpál benützte elementare Methoden.

Wir werden in dieser Note auch nur partielle Lösungen des Problems finden, indem wir statt der allgemeinsten EU-Gruppen nur spezielle Klassen von EU-Gruppen betrachten. Diese Klassen umfassen die Klasse der Abel'schen Gruppen (z.B. die FC-Gruppen, RN-Gruppen, lokal endliche S-Gruppen usw.).

Wir brauchen die folgende Vorbereitungen.

Besitzt ein jedes Element $g \in G$ nur endlich viele konjugierte Elemente $x^{-1}gx$ ($x \in G$), so wird G eine FC-Gruppe genannt [6]. Die endlichen Gruppen und die Abel'schen Gruppen sind FC-Gruppen.

Hat die Gruppe G ein Normalsystem: $1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset \ldots \subset G_\gamma = G(\alpha \in \Gamma)$, das in Bezug auf das mengentheoretisches Umfassen als Ordnungsrelation nicht notwendig wohlgeordnet ist und, bei den Sprüngen $\alpha-1$, α, die entsprechende Faktorgruppe $G_\alpha/G_{\alpha-1}$ kommutativ ist, (wenn $\alpha-1$ überhaupt existiert), so wird G eine RN-Gruppe genannt ([5] Seite 367). Es gibt eine ZA-Gruppe, die auch eine RN-Gruppe, aber keine auflösbare Gruppe ist. Die auflösbaren Gruppen sind offenbar RN-Gruppen.

Erzeugt jedes endliches System $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Elemente von G eine endliche Untergruppe (einen endlichen Normalteiler), so nennen wir G lokal endlich (lokal normal). Die periodischen FC-Gruppen sind lokal normal [6]. Die Frage ob periodische, aber nicht lokal endliche, Gruppen existieren, ist bisher ungelöst, und sie steht in Zusammenhang mit einem berühmten Burnside'schen Problem. Wir werden sehen, dass aus der positiven Lösung des Burnside'schen Problems auch die Lösung des hier betrachteten Schmidt'schen Problems für S-Gruppen folgt.

Bilden die Elemente von endlicher Ordnung einer beliebigen Gruppe G eine Untergruppe T, und besitzt G für jede Primzahl p eine einzige Sylow'sche p-Gruppe S_p, so wird G eine S-Gruppe genannt. Dann ist T das direkte Produkt der Gruppen S_p. Jede torsionsfreie Gruppe, jede endliche nilpotente Gruppe, jede Abel'sche Gruppe und jede p-Gruppe ist eine S-Gruppe. ([5], Seite 413.).

Man kann andere Begriffe in dem Buch [5] von Kurosch kennenlernen.

Hilfssatz 1. *Eine EU-Gruppe G ist periodisch und zwar gilt dann in G die Minimalbedingung für die Untergruppen. Eine EU-Gruppe ist direkt unzerlegbar. Jedes nicht-triviale homomorphe Bild einer EU-Gruppe ist ebenfalls eine EU-Gruppe.*

Beweis ist klar.

Hilfssatz 2. *Eine kommutative EU-Gruppe G ist einer Gruppe $C(p^\infty)$ isomorph.*

Beweis. G ist auf Grund des Hilfssatzes 1. eine p-Gruppe. Da die EU-Gruppe G nur endlich viele Elemente von Ordnung p besitzen kann, ist G^p unendlich, also $G^p = G$ und $G \cong C(p^\infty)$.

Hilfssatz 3. *Eine lokal endliche p-Gruppe G mit Minimalbedingung für die Untergruppen besitzt ein nicht-triviales Zentrum Z.*

Beweis. Es sei $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine endliche Menge aus G und D_n der Durchschnitt der Normalisatoren $N(a_j)$, wobei $j = 1, 2, \ldots, n$. Fügt man der Menge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ein Element a_{n+1} hinzu, so besteht $D_{n+1} \subseteq D_n$. Wegen der Minimalbedingung gibt es einen Index i mit $D_m = D_i$ für $m \geq i$. Dann besitzt $H_m = \{a_1, \ldots, a_m\}$ wegen der lokal endlichen Eigen-

schaft von G ein nicht-triviales Zentrum $Z_m \subseteq D_m = D_i$. Daraus erhält man $1 \neq Z_m \subseteq \bigcap_{a \in G} N(a) = Z$, d. h. $Z \neq 1$.

Satz 1. *Es sei K eine Gruppenklasse, die mit einer Gruppe $G \in K$ auch alle homomorphen Bilder $G' = G\varphi$ enthält. Besitzt jede EU-Gruppe dieser Klasse einen nicht-trivialen Normalteiler, so ist jede EU-Gruppe aus dieser Klasse K einer Gruppe $C(p^\infty)$ isomorph.*

Beweis. Es sei H_1 ein nicht-trivialer Normalteiler der EU-Gruppe G aus K, und $1 \neq g \in H_1$. Da g wegen $O(H_1) < \infty$ nur endlich viele konjugierte Elemente besitzt, so ist die Normalisatorgruppe von g offenbar $N(g) = G$. H_1 ist also im Zentrum Z von G enthalten. $G_1 = G/H_1$ gehört ebenfalls der Klasse K und sie besitzt einen nicht-trivialen Normalteiler H_2/H_1 mit $H_2 \subseteq Z$. Die Vereinigung H der Kette $1 \subset H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots$ ist eine unendliche Abel'sche Gruppe. Folglich gilt $H = G = Z$ und auf Grund des Hilfssatzes 2. besteht auch $G \cong C(p^\infty)$ für eine Primzahl p.

Satz 2. *Eine FC-Gruppe G ist dann und nur dann eine EU-Gruppe wenn G einer Gruppe $C(p^\infty)$ isomorph ist.*

Beweis. Die FC-Eigenschaft ist homomorph-invariant, und eine FC-Gruppe ist lokal normal. Nach dem Hilfssatz 1. und nach dem Satz 1. folgt $G \cong C(p^\infty)$. Die Umkehrung ist trivial.

Satz 3. *Eine EU-Gruppe G, die der Klasse der lokal endlichen S-Gruppen gehört, ist einer Gruppe $C(p^\infty)$ isomorph.*

Beweis. Die EU-Gruppe G ist auf Grund des Hilfssatzes 1. eine p-Gruppe, denn sie ist eine S-Gruppe. Aus der lokal Endlichkeit und aus der EU-Eigenschaft folgt nun nach dem Hilfssatz 3. und nach dem Satz 1. unsere Behauptung.

Satz 4. *Eine EU-Gruppe G, die der Klasse von RN-Gruppen gehört, ist einer Gruppe $C(p^\infty)$ isomorph.*

Beweis. Wendet man einen wichtigen Satz von Tschernikow-Schmidt über die RN-Gruppen mit Minimalbedingung für die Untergruppen ([5], Seiten 376-378.) an, so folgtes, dass G eine Schreier'sche Erweiterung einer periodischen vollständigen Abel'schen Untergruppe A mit einer auflösbaren endlichen Gruppe B ist. Folglich besteht $O(A) = \infty$, $A = G$ und aus dem Hilfssatze 2. erhält man $G \cong C(p^\infty)$.

Bemerkung. Ein ähnliches ringtheoretisches Problem ist in [4] erörtert. Ein duales gruppentheoretisches Problem des Problems von O. J. Schmidt ist in [2] betrachtet und in [1] ganz elementarweise gelöst. In unserer Note [7] findet man ein ringtheoretisches Problem, das dem gruppentheoretischen Problem von [2] ähnlich ist.

SCHRIFTTUM

[1] J. Erdös, *The theory of groups with finite classes of conjugate elements*, Acta Math. Sci. Hung. **5** (1954), 45-58.

[2] J. G. Fedorov, *Über unendliche Gruppen deren alle nichttrivialen Untergruppen endliche Indexe haben* (in russischer Sprache) Uspiechi Mat. Nauk **6** I (1951), 187-189.

[3] L. Fuchs, *Abelian groups*, Publ. House Hungar. Acad. Sci., Budapest, 1958.

[4] István Kovács, *Infinite rings without infinite proper subrings*, Publ. Math. Debrecen **4** (1955), 104-107.

[5] A. G. Kurosch, *Gruppentheorie* Moskau, 1953 (in russischer Sprache).

[6] B. H. Neumann, *Groups with finite classes of conjugate elements*, Proc. London Math. Soc. **3**, (1951), 178-187.

[7] F. A. Szász, *Sur les anneaux infinis ne contenant que des sous-anneaux non-triviaux de l'index fini*, Izwiestia na Matem. Inst. na Bułgarske Akad. na Nauk **3** (1958), 29-31.

[8] István Szélpál, *Die unendlichen Abelschen Gruppen mit lauter endlichen echten Untergruppen*, Publ. Math. Debrecen **1** (1949), 63-64.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 7, 1959

MATHEMATICS

Some Theorems on the Gauss Algorithm and the Matrix Orthogonalization Process

by

S. GLIDMAN

Presented by K. BORSUK on April 27, 1959

a) Let $a_{r,s}^{(l)}$ denote the l-th successive component of the external vector $\overline{a}_{rs}(\overline{a}_i)$ defined by formulae (3) of paper [3], where $r = 1, 2, \ldots, n-1$; $s = 1, 2, \ldots, n-r$.

It has been proved that for $l \leqslant n-r$ the determinant

$$(1) \qquad A_{r,s}^{(l)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+l} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2,r+l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \ldots & a_{rr} & a_{r,r+l} \\ a_{r+s,1} & a_{r+s,2} & \ldots & a_{r+s,r} & a_{r+s,r+l} \end{vmatrix}$$

is expressed by the formula

$$(2) \qquad A_{r,s}^{(l)} = \frac{a_{r,s}^{(l)}}{a_{11}^{r-1}\, a_{1,1}^{(1)r-2} \ldots a_{r-2,1}^{(1)}}$$

(with $a_{i,1}^{(1)} \neq 0$ for $i = 1, 2, \ldots, r-2$).

Setting

$$A_{r,1}^{(1)} = A_{r+1}$$

we can obtain from (2) for $l \leqslant n-r$ by induction

$$(3) \qquad a_{r,s}^{(l)} = A_1^{2^{r-2}} A_2^{2^{r-3}} \ldots A_{r-1} A_{r,s}^{(l)}.$$

b) Having the vectors $\overline{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, let us introduce the vectors:

$$(4) \qquad \overline{u}_{1,s} = a_{11}\overline{a}_{s+1} - a_{s+1,1}\overline{a}_1,$$

$$(4') \qquad \overline{u}_{r,s} = u_{r-1,1}^{(r)}\overline{u}_{r-1,s+1} - u_{r-1,s+1}^{(r)}\overline{u}_{r-1,1}.$$

It can easily be seen that these formulae define a linear operator active in the process of triangulation of a matrix [1].

For the successive components of the vector $\overline{u}_{r,s}$ the following formulae hold:

$$(5)\qquad \begin{aligned} u_{r,s}^{(l)} &= 0 \qquad \text{for} \quad l = 1, 2, \ldots, r \\ u_{r,s}^{(l)} &= a_{r,s}^{(l-r)} \qquad \text{for} \quad l = r+1, r+2, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

c) The following definition is introduced: two systems of vectors, $\overline{a}_i$ and $\overline{b}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, are termed isometric, if: 1^0 the modules of corresponding vectors are equal, 2^0 the angle between any two vectors of one system is equal to the angle between the corresponding vectors of the second system.

It can easily be verified that the following statements are valid:

1. The relation of isometry is transitive and reflexive.

2. In isometric systems the scalar products of corresponding vectors are equal.

3. In isometric systems the external products of pairs of corresponding vectors form isometric systems.

4. In isometric systems linear combinations of corresponding vectors form isometric systems.

d) Let us consider the vectors defined by the formulae

$$(6)\qquad \begin{aligned} \overline{w}_{1,s} &= \frac{a_1^2 \overline{a}_{s+1} - \overline{a}_1 \overline{a}_{s+1} \overline{a}_1}{a_1} \\ \overline{w}_{r,s} &= \frac{w_{r-1,1}^2 \overline{w}_{r-1,s+1} - (\overline{w}_{r-1,1} \overline{w}_{r-1,s+1}) \overline{w}_{r-1,1}}{w_{r-1,1}}\,. \end{aligned}$$

The following theorem holds:

THEOREM 1. *For a given* $r = 1, 2, \ldots, n-1$ *the two systems of vectors* $\overline{w}_{r,s}$ *and* $\overline{a}_{r,s}$ $(s = 1, 2, \ldots, n-r)$ *are isometric.*

The proof is carried out by induction on the basis of statements 1–4 and [3].

The following identity is valid: for $j = 1, 2, \ldots, r$

$$(7)\qquad \overline{w}_{r,s} \overline{a}_j = 0\,.$$

Hence [2], for $t = s,\ s+1, \ldots, n-r-l$:

$$(8)\qquad \overline{w}_{r,s} \overline{w}_{r+t,l} = 0$$

$$(8')\qquad \overline{u}_{r,s} \overline{w}_{r+t,l} = 0\,.$$

Formulae (6) thus define an orthogonalizing operator, the vector $\overline{w}_{r,1}$ having the direction of the successive height h_{r+1}, $\overline{w}_{r,s}$ – that of the lateral height $H_{r,s}$ [3].

For $j = r+1, r+2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, r$ it is also easy to prove by induction that

$$\overline{w}_{r,s}\overline{a}_j = \overline{w}_{r,j-r}\overline{a}_{s+r} = \frac{\overline{w}_{r,s}\overline{w}_{k,j-k}}{a_1 a_{1,1} \ldots a_{k-1,1}} = \frac{\overline{w}_{r,s}\overline{u}_{k,j-k}}{a_{11}a_{1,1}^{(1)} \ldots a_{k-1,1}^{(1)}}. \tag{9}$$

e) THEOREM 2. *Vectors $\overline{u}_{r,s}$ and $\overline{w}_{r,s}$ may be expressed by vectors $\overline{a}_i$ in an analogical way, by means of symbolic determinants:*

$$\overline{U}_{r,s} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \overline{a}_1 \\ a_{21} & a_{1,1}^{(1)} & \ldots & 0 & \overline{a}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & a_{1,r-1}^{(1)} & \ldots & a_{r-1,1}^{(1)} & \overline{a}_r \\ a_{r+s,1} & a_{1,r+s-1}^{(1)} & \ldots & a_{r-1,s+1}^{(1)} & \overline{a}_{r+s} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

$$\overline{w}_{r,s} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & \overline{a}_1 \\ \dfrac{\overline{a}_1\overline{a}_2}{a_1} & a_{1,1} & \ldots & 0 & \overline{a}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\overline{a}_1\overline{a}_r}{a_1} & \dfrac{\overline{a}_{1,1}\overline{a}_{1,r-1}}{a_{1,1}} & & a_{r-1,1} & \overline{a}_r \\ \dfrac{\overline{a}_1\overline{a}_{r+s}}{a_1} & \dfrac{\overline{a}_{1,1}\overline{a}_{1,r+s-1}}{a_{1,1}} & \ldots & \dfrac{\overline{a}_{r-1,1}\overline{a}_{r-1,s+1}}{a_{r-1,1}} & \overline{a}_{r+1} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

The proof is carried out by induction.

We see from (4) that formula (10) is valid for $r = 1$.

Assuming the validity of the formula for vectors of order r we find from (4′)

$$\overline{u}_{r+1,s} = a_{r,s}^{(1)} \begin{vmatrix} & & \overline{a}_1 \\ & M & \vdots \\ & & \overline{a}_r \\ a_{r+s+1,1} \ldots a_{r-1,s+2}^{(1)} & & \overline{a}_{r+s+1} \end{vmatrix} - a_{r,s+1}^{(1)} \begin{vmatrix} & & \overline{a}_1 \\ & M & \vdots \\ & & \overline{a}_r \\ a_{r+1,1} \ldots a_{r-1,2}^{(1)} & & \overline{a}_{r+1} \end{vmatrix},$$

where M denotes the triangular matrix

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{1,1}^{(1)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{1,r-1}^{(1)} & \ldots & a_{r-1,1}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Hence, we have

$$\bar{u}_{r+1,s}=\left|\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & \bar{a}_1 \\ & M & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & \bar{a}_r \\ \hline a_{r+1,1} & \dots & a^{(1)}_{r-1,2} & a^{(1)}_{r,1} & \bar{a}_{r+1} \\ a_{r+s+1,1} & \dots & a^{(1)}_{r-1,s+2} & 0 & \bar{a}_{r+s+1} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & \bar{a}_1 \\ & M & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & \bar{a}_r \\ \hline a_{r+1,1} & \dots & a^{(1)}_{r-1,2} & 0 & \bar{a}_{r+1} \\ \bar{a}_{r+s+1,1} & \dots & a^{(1)}_{r-1,s+2} & a^{(1)}_{r,s+1} & \bar{a}_{r+s+1} \end{array}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a^{(1)}_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+1,1} & a^{(1)}_{1,r} & \dots & a^{(1)}_{1,1} \\ a_{r+s+1,1} & a^{(1)}_{1,r+s} & & a^{(1)}_{r,s+1} \end{vmatrix}.$$

The proof of formula (11) is analogical.

Let us take $s=1$ in formulae (10) and (11) and develop the determinants in accordance with the last column. Denoting in the development the coefficients of $\bar{a}_i$ by k_{ri} and l_{ri} we obtain for $r=0,1,\dots,n-1$ (assuming that $\bar{u}_{01}=\bar{w}_{01}=\bar{a}_1$, $\bar{k}_{01}=l_{01}=1$):

$$\bar{u}_{r,1}=\sum_{i=1}^{r+1} k_{ri}\bar{a}_i\,, \tag{12}$$

$$\bar{w}_{r,1}=\sum_{i=1}^{r+1} l_{ri}\bar{a}_i\,, \tag{13}$$

where

$$k_{ri}=(-1)^{r+i-1}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a^{(1)}_{1,i-2} & \dots & a^{(1)}_{r-1,i-2} \\ a_{i+1,1} & a^{(1)}_{1,i} & \dots & a^{(1)}_{r-1,i-r+r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & a^{(1)}_{1,i} & \dots & a^{(1)}_{r-1,2} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Putting briefly

$$k_{ri}=f(a^{(1)}_{\nu,\mu})\,,$$

we have

$$l_{ri}=f\left(\frac{\bar{a}_{\nu,1}\bar{a}_{\nu,\mu}}{a_{\nu,1}}\right), \tag{15}$$

where ν and μ take all the values

$$\nu=0,1,2,\dots,r-1$$

$$\mu=1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,r-\nu+1\,.$$

Denotiang by K the triangular matrix

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ k_{11} & k_{12} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n-1,1} & k_{n-1,2} & \dots & k_{n-1,n} \end{bmatrix} \tag{16}$$

and by L the analogical matrix of the coefficients l_{ri} we can write the equalities (12) and (13) in the form of matrix equalities:

$$KA = U, \tag{17}$$

$$LA = W, \tag{18}$$

where the matrix U by (5) is triangular:

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{1,1}^{(1)} & \dots & a_{1,1}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,1}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{19}$$

and on account of formulae (7) and (8) the matrix:

$$W = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ w_{1,1}^{(1)} & w_{1,1}^{(2)} & \dots & w_{1,1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{n-1,1}^{(1)} & w_{n-1,1}^{(2)} & \dots & w_{n-1,1}^{(n)} \end{bmatrix} \tag{20}$$

is semi-orthogonal [1].

Formulae (14)-(18) contain an effective transition to a triangular and to a semi-orthogonal matrix.

Setting

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & k_{12} & \ddots \\ & & k_{n-1,n} \end{bmatrix} \tag{21}$$

and

$$\bar{K} = D_1^{-1} K \tag{22}$$

we have

$$\bar{K} A = U_1, \tag{23}$$

where $\bar{K}$ is a triangular matrix having unities on the diagonal and $U_1 = D_1^{-1} U$ is a triangular matrix.

Setting

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & w_{1,1} & \ddots \\ & & w_{n-1,1} \end{bmatrix} \tag{24}$$

we obtain

$$D^{-1}LA = D^{-1}W = N, \tag{25}$$

where N is an orthogonal matrix.

f) From (17) we have

$$LAA'L' = WW' = D^2 \tag{26}$$

(the apostrophe marks the transposed matrix).

Setting

$$AA' = G \tag{27}$$

we have

$$LG = D^2(L^{-1})', \tag{28}$$

where, as can easily be seen, LG is a triangular matrix.

Let D be a diagonal matrix:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & l_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & l_{n-1,n} \end{vmatrix}, \tag{29}$$

$$\bar{L} = D_2^{-1}L \tag{30}$$

will thus be a triangular matrix having unities on the diagonal.

Comparing formulae (23) and (28) with formula (30), by the theorem on the uniqueness of decomposition of a matrix into a product of two triangular matrices [1], we obtain

$$\bar{K}\bar{L} = {}_g, \tag{31}$$

where $\bar{K}_g$ denotes the matrix formed according to formulae (16) and (22) for the matrix G (27).

It can easily be verified that a matrix $Q = \Delta\bar{K}_g$, where Δ is an arbitrary diagonal matrix, can replace the matrix L in the process of orthogonalization. For we have from (18), (30) and (31).

$$W_1 = QA = \Delta D_2^{-1}W$$

$$W_1W_1' = \Delta D_2^{-1}WW'D_2^{-1}\Delta = \Delta^2 D_2^{-2}D^2,$$

hence W_1 is a semi-orthogonal matrix.

Consequently, we have the following

THEOREM 3. *In the process of orthogonalization of a given matrix the matrix L can be replaced by the matrix ΔK_g^1, where Δ is an arbitrary diagonal matrix and K_g is matrix* (16) *formed for the Gram matrix of the given matrix.*

Thus, we have also ascertained that the orthogonalization process is reduced to the triangulation process of the Gram matrix of a given matrix.

WARSAW TECHNICAL UNIVERSITY
(POLITECHNIKA WARSZAWSKA)

REFERENCES

[1] E. Bodewig, *Matrix Calculus*, Amsterdam, 1956.

[2] K. Borsuk, *Geometria analityczna w n wymiarach*, Warsaw, 1950.

[3] S. Glidman, *Some theorems concerning determinants*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série des sci. math., astr. et phys. **6** (1958), 275.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 7, 1959

MATHÉMATIQUE

Sur les équations différentielles dans les espaces de Banach

par

J. KISYŃSKI

Présenté par S. MAZUR le 6 mai 1959

On sait que les hypothèses classiques suffisantes pour la convergence des approximations successives de Picard pour les équations différentielles de la forme

$$x' = f(t, x), \tag{1}$$

à savoir que la fonction $f(t, x)$ soit continue et satisfasse à la condition de Lipschitz par rapport à x, assurent aussi la convergence des approximations successives pour les équations dans les espaces de Banach (cf. p. ex. [7], p. 291). D'autre part la méthode des approximations successives est applicable aux équations différentielles de la forme (1) dans l'espace euclidien à n dimensions, si l'on remplace la condition de Lipschitz par d'autres conditions, moins restrictives, suffisantes toutefois pour assurer l'unicité des solutions (cf. Van Kampen [5], Dieudonné [4], Wintner [10], La Salle [6], Viswanatham [8], Coddington et Levinson [2] ou bien [3], p. 53). Bien que les démonstrations des auteurs mentionnés ne soient valables pour les espaces de Banach que si l'on admet la compacité des sphères, le plus général de ces résultats, notamment celui de Coddington et Levinson [2], s'étend aux équations différentielles dans des espaces de Banach arbitraires. On a, en effet, le théorème suivant,

THÉORÈME 1. *Soit $f(t, x)$ une fonction continue appartenant à $E^{\langle 0,a\rangle \times E}$, où E est un espace de Banach et a un nombre positif. Admettons les hypothèse suivantes:*

1°. *Pour tout nombre positif r il existe une fonction $\omega_r(t, u)$ à valeurs réelles, définie pour $t \in (0, a\rangle$ et $u \in \langle 0, 2r\rangle$, continue et non décroissante par rapport à u pour tout t fixé, mesurable par rapport à t pour tout u fixé et satisfaisant aux conditions suivantes:*

(a) $\omega_r(t, 0) = 0$ *pour presque tout* $t \in (0, a\rangle$,

(b) $\int_{\varepsilon}^{a} \omega_r(t, 2r)\,dt < +\infty$ *pour tout* $\varepsilon \in (0, a)$,

(c) $\|f(t,x)-f(t,y)\| \leqslant \omega_r(t,\|x-y\|)$ *pour* $t \in (0,a\rangle$, $\|x\| \leqslant r$ *et* $\|y\| \leqslant r$,

(d) $u(t) \equiv 0$ *est, pour tout* $\varepsilon \in (0,a\rangle$, *l'unique fonction continue dans l'intervalle* $\langle 0,\varepsilon\rangle$ *vérifiant les conditions* $u'(0)=0$ *et* $u(t) = \int_0^t \omega_r(\tau, u(\tau))\,d\tau$ *pour* $t \in \langle 0,\varepsilon\rangle$.

Admettons encore que *)

2°. *pour tout nombre non-négatif* ϱ_0 *il existe une fonction continue* $\varrho(t)$, *définie dans tout l'intervalle* $\langle 0,a\rangle$ *et remplissant dans cet intervalle l'équation*

$$\varrho(t) = \int_0^t M(\tau, \varrho(\tau))\,d\tau + \varrho_0\,,$$

où

$$M(t,r) = \sup_{\|x\|\leqslant r} \|f(t,x)\|\,.$$

Dans ces conditions l'équation différentielle (1) *adment, pour tout* $\mathring{x} \in E$, *une solution* $x(t) \in E^{\langle 0,a\rangle}$, *vérifiant la condition initiale* $x(0)=\mathring{x}$; *on obtient cette solution à partir d'une fonction continue arbitraire* $x_0(t) \in E^{\langle 0,a\rangle}$, *comme limite d'une suite d'approximations successives uniformément convergente dans l'intervalle* $\langle 0,a\rangle$.

Démonstration 1. Désignons par C l'espace de Banach des fonctions continues appartenant à $E^{\langle 0,a\rangle}$, dont la norme est $\|x\|_C = \max_{0\leqslant t\leqslant a} \|x(t)\|_E$, et par F — la transformation de l'espace C en lui même, définie par la formule

$$Fx(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau))\,d\tau + \mathring{x}\,.$$

Vu l'hypothèse 2°, la fonction $M(t,r)$ est sommable pour tout $r>0$, par rapport à t dans l'intervalle $\langle 0,a\rangle$; il resulte donc des inegalités

$$\|Fx-Fy\|_C \leqslant \int_0^a \big\|f(t,x(t))-f(t,y(t))\big\|_E\,dt$$

et

$$\big\|f(t,x(t))-f(t,y(t))\big\|_E \leqslant 2M(t,r) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0,a\rangle\,,$$
$$\text{si} \quad \|x\|_C \leqslant r \quad \text{et} \quad \|y\|_C \leqslant r\,,$$

en vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme, que la transformation F est continue dans l'espace C.

*) Cette condition, assurant l'existence non-locale d'une solution de l'équation (1), est due à [M. A. Bielecki. Elle comprend comme cas particuliers les conditions considérées par Wintner [9].

Pour établir le Théorème 1 il suffit donc de prouver que, pour toutes les fonctions $x_0 \in C$ et $y_0 \in C$, les suites de fonctions $\{x_n\}_{n=0,1,\ldots}$ et $\{y_n\}_{n=0,1,\ldots}$, définies par les formules $x_n = Fx_{n-1}$ et $y_n = Fy_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, convergent dans l'espace C vers la même limite.

2. En vertu de l'hypothèse 2^0 il existe une fonction $\varrho(t)$ absolument continue dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ et vérifiant dans cet intervalle l'équation

$$\varrho(t) = \int_0^t M\big(\tau, \varrho(\tau)\big)\, d\tau + \|\mathring{x}\|_E + \|x_0\|_C + \|y_0\|_C .$$

Désignons par A_0 l'ensemble de toutes fonctions $x \in C$ telles, que $\|x(t)\|_E \leqslant \varrho(t)$ pour $t \in \langle 0, a\rangle$ et posons ensuite $A_n = F(A_{n-1})$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Evidemment, $x_0 \in A_0$, $y_0 \in A_0$ et, si $x \in A_0$, on a $\|Fx(t)\|_E \leqslant \int_0^t M(\tau, \varrho(\tau))\, d\tau + \|\mathring{x}\|_E \leqslant \varrho(t)$, donc $A_1 \subset A_0$, d'où l'on tire, par récurrence sur n, $x_n \in A_n$, $y_n \in A_n$ et $A_n \subset A_{n-1}$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Pour prouver que les deux suites $\{x_n\}_{n=0,1,\ldots}$ et $\{y_n\}_{n=0,1,\ldots}$ convergent vers la même limite, il suffit de montrer que la suite des fonctions

$$D_n(t) = \sup_{x,y \in A_n} \|x(t) - y(t)\|_E , \qquad n = 0, 1, \ldots ,$$

converge uniformément vers zéro dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$.

Cette suite est une suite non croissante de fonctions non-négatives et, comme il résulte de l'inégalité

$$|D_n(t'') - D_n(t')| \leqslant 2 \left| \int_{t'}^{t''} M\big((\tau, \varrho(\tau)\big)\, d\tau \right| , \qquad n = 1, 2, \ldots ,$$

facile à vérifier, équicontinues; elle converge donc uniformément dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ vers une fonction continue $D(t)$. Il reste à prouver que $D(t) \equiv 0$ pour $t \in \langle 0, a\rangle$.

3. Prenons deux nombres arbitraires $t' \in (0, a\rangle$ et $t'' \in (0, a\rangle$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n = 1, 2, \ldots$ il existe deux fonctions $x \in A_{n-1}$ et $y \in A_{n-1}$ telles, que $D_n(t'') \leqslant \|Fx(t'') - Fy(t'')\|_E + \varepsilon$, et par conséquent

$$\begin{aligned} D_n(t'') - D_n(t') - \varepsilon &\leqslant \|Fx(t'') - Fy(t'')\|_E - \|Fx(t') - Fy(t')\|_E \\ &\leqslant \|\{Fx(t'') - Fx(t')\} - \{Fy(t'') - Fy(t')\}\|_E \\ &= \left\| \int_{t'}^{t''} \{f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\}\, d\tau \right\|_E \\ &\leqslant \left| \int_{t'}^{t''} \omega_{\varrho(\tau)}\big(\tau, D_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau \right| , \end{aligned}$$

d'où, ε étant arbitraire, en appliquant le théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme, nous obtenons l'inégalité

$$(*) \quad D(t'')-D(t') \leqslant \Big| \int_{t'}^{t''} \omega_{\varrho(a)}\big(\tau, D(\tau)\big)\,d\tau \Big| \quad \text{pour} \quad t' \in \langle 0, a\rangle \quad \text{et} \quad t'' \in \langle 0, a\rangle .$$

4. Posons $\varkappa(t) = \sup \|f(\tau, x)-f(0, \mathring{x})\|_E$, où $\tau \in \langle 0, t\rangle$ et $\|x-\mathring{x}\|_E \leqslant \int_0^t M(\tau, \varrho(\tau))\,d\tau$. La fonction $f(t, x)$ étant continue, $\varkappa(t)\to 0$, lorsque $t\to 0$. Pour toutes les fonctions $x \in A_1$ et $y \in A_1$ on a $\|x(t)-\mathring{x}\|_E$, $\|y(t)-\mathring{x}\|_E \leqslant \int_0^t M(\tau, \varrho(\tau))\,d\tau$, d'où $\|Fx(t)-Fy(t)\|_E = \big\| \int_0^t \big\{f(\tau, x(\tau))-f(\tau, y(\tau))\big\}\,d\tau\big\|_E \leqslant t \cdot 2\varkappa(t)$, donc $D_2(t) \leqslant 2t\varkappa(t)$, d'où il résulte, à cause de l'inégalité $0 \leqslant D(t) \leqslant D_2(t)$, que l'on a

$$(**) \qquad D'(0) = 0 .$$

5. Il résulte de $(*)$ et $(**)$ que $D(t) \equiv 0$ pour $t \in \langle 0, a\rangle$. Pour la constater, il suffit de faire un raisonnement analogue à celui qu'ont appliqué. Coddington et Levinson ([2], pp. 79-80, voir aussi [3], p. 50). On peut donc considérer la démonstration du Théorème 1 comme achevée.

Il est à remarquer que dans le Théorème 1, lorsqu'il s'agit d'un espace E dans lequel les sphères ne sont pas compactes, l'hypothèse 1° est essentielle non seulement pour l'unicité de la solution et la convergence des approximations successives, mais aussi pour l'existence même d'une solution. En effet, N. Bourbaki ([1], p. 25, exemple 17), a montré que dans un tel espace l'équation (1), où la fonction $f(t, x)$ est continue (elle ne dépend pas de t, est uniformément continue dans tout l'espace E et satisfait à la condition 2°), peut ne pas admettre de solution dans aucun intervalle $\langle 0, \varepsilon\rangle$, où $\varepsilon > 0$.

Désignons par E_0 l'espace des suites $x = \{x_n\}_{n=0,1,\ldots}$, $x_n \in E$, telles que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_E = 0$ et admettons la norme $\|x\|_{E_0} = \max_{n=0,1,\ldots} \|x_n\|_E$. En appliquant le Théorème 1 à l'espace E_0 et aux fonction $f_0(t, x) = \{f(t, x_n)\}_{n=0,1,\ldots}$, on démontre que la solution de l'équation (1) dépend d'une façon continue de sa valeur initiale $\mathring{x}$. Ainsi, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Si les hypothèses du Théorème* 1 *sont vérifiées et si* $\{x_n(t)\}_{n=0,1,\ldots}$ *est une suite de solutions de l'équation* (1), *définies dans l'intervalle* $\langle 0, a\rangle$, *telle que* $\lim_{n\to\infty} \|x_n(0) - x_0(0)\| = 0$, *on a* $\lim_{n\to\infty} (\max_{0\leqslant t\leqslant a} \|x_n(t) - x_0(t)\|) = 0$.

INSTITUT MATHEMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, Paris, 1951.

[2] E. A. Coddington et N. Levinson, *Uniqueness and convergence of successive approximations*, J. Indian Math. Soc., **16** (1952), 75.

[3] — *Theory of ordinary differential equations*, New York — Toronto — London, 1955.

[4] J. Dieudonné, *Sur la convergence des approximations successives*, Bull. Sci. Math., **69** (1945), 62.

[5] E. R. Van Kampen, *Notes on systems of ordinary differential equations*, Amer. J. Math., **63** (1941), 371.

[6] J. La Salle, *Uniqueness theorems and successive approximations*, Annals of Math., **50** (1949), 722.

[7] L. A. Lusternik et V. I. Sobolev, *Éléments d'analyse fonctionnelle* (en russe), Gos. Izd. Techn.-Teor. Lit., Moscow-Leningrad, (1951).

[8] B. Viswanatham, *The general uniqueness theorem and successive approximations*, J. Indian Math. Soc., **16** (1952), 69.

[9] A. Wintner, *The non-local existence problem of ordinary differential equations* Amer. J. Math., **66** (1945), 277.

[10] — *On the convergence of successive approximations*, Amer. J. Math., **68** (1946), 13.

БЮЛЛЕТЕНЬ
ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
Серия мат., астр. и физ. наук
Том. VII, № 7, 1959

МАТЕМАТИКА

А. ГРАНАС

ТЕОРЕМА О ПРОДОЛЖЕНИИ ГОМОТОПИИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЕЁ НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Представлено К. БОРСУКОМ 14 мая 1959

В своем известном мемуаре [8] Ж. Лере и Ю. Шаудер перенесли на бесконечномерный случай понятие степени отображения и используя это понятие сформулировали и обосновали метод продолжения по параметру для нелинейных уравнений в банаховом пространстве.

В настоящей работе мы показываем, что основные топологические факты, доказываемые в теории Лере-Шаудера можно вывести элементарно, не прибегая к понятиям теории гомологий. Вместо понятия степени отображения мы рассматриваем понятие существенного и несущественного векторного поля и приводим обоснование метода продолжения по параметру, вытекающее из доказываемой нами теоремы о продолжении гомотопии для вполне непрерывных векторных полей в банаховом пространстве. Эта теорема представляет собой бесконечномерный аналог известной теоремы К. Борсука о продолжении гомотопии (см. [3] и [6] стр. 86).

Мы приводим далее, при помощи понятия существенности векторного поля, теорему 4, представляющую собой бесконечномерный аналог теоремы К. Борсука об антиподах. Такого рода аналог для банаховых пространств был впервые в гомологических терминах сформулирован и доказан М. Красносельским в работе [7]. В приводимой нами формулировке теорема об антиподах для бесконечномерного случая доказывается элементарно; это доказательство использует первоначальное элементарное доказательство теоремы об антиподах для конечномерного случая, данное К. Борсуком в [2].

В заключение мы перечисляем вкратце некоторые известные топологические теоремы, находящие применение в теории нелинейных уравнений, которые выводятся из теоремы о продолжении гомотопии и теоремы об антиподах.

Определения и предварительные замечания

1. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: E_∞ — бесконечномерное банахово пространство, P_∞ — пространство E_∞ без точки 0;

V_∞ обозначает единичный открытый шар в пространстве E_∞, а S_∞ — границу этого шара.

Для произвольных метрических пространств X, Y запись $f\colon X \to Y$ означает, что f является непрерывным отображением X в Y; Y^X обозначает множество всех непрерывных отображений пространства X в Y, $X \times Y$ — топологическое произведение X и Y.

Если $f_0 \in Y^{X_0}$, $X_0 \subset X$ то запись $f_0 \subset f \in Y^X$ означает, что f является *продолжением* отображения f_0 на множество X; будем писать также $f_0 = f|X_0$.

Символ I будет обозначать замкнутый отрезок $[0, 1]$.

2. Пусть X произвольное пространство. Отображение $F\colon X \to E_\infty$ называем *вполне непрерывным* на X, если множество $F(X)$ компактно в E_∞. Вполне непрерывное отображение $F\colon X \to E_\infty$ называем *конечномерным*, если его значения принадлежат некоторому конечномерному подпространству $E_n \subset E_\infty$.

Будем пользоваться следующим известным предложением [8]:

(2,1). *Если отображение $F\colon X \to E_\infty$ вполне непрерывно на X, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечномерное отображение $F_\varepsilon\colon X \to E_n$, что при любом $x \in X$ выполняется неравенство*:

$$\|F(x) - F_\varepsilon(x)\| < \varepsilon . \tag{1}$$

Из (2,1) выводится следующее предложение:

(2,2). *Пусть X_0 — замкнутое подмножество пространства X. Тогда любое вполне непрерывное отображение $F_0\colon X_0 \to E_\infty$ можно продолжить до вполне непрерывного отображения $F\colon X \to \operatorname{conv}(F_0(X_0))$* *).

Вполне непрерывные векторные поля

3. Пусть $X \subset E_\infty$. Непрерывное отображение $f\colon X \to E_\infty$ будем называть *вполне непрерывным векторным полем на X*, если оно допускает представление

$$f(x) = x - F(x), \tag{2}$$

где отображение $F\colon X \to E_\infty$ вполне непрерывно на X.

Совокупность всех вполне непрерывных векторных полей на X будем обозначать через $\mathfrak{C}(E_\infty^X)$.

Вполне непрерывное поле $f \in \mathfrak{C}(E_\infty^X)$ называем *конечномерным* на X, если вполне непрерывное отображение F, соответствующее полю f в силу формулы (2), конечномерно.

В множестве $\mathfrak{C}(E_\infty^X)$ удобно ввести метрику, полагая для любых $f, g \in \mathfrak{C}(E_\infty^X)$:

$$|f - g| = \sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\| . \tag{3}$$

*) $\operatorname{conv}(F_0(X_0))$ — обозначает наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее $F_0(X_0)$.

Имеет место следующее предложение:

(3,1). *Если X замкнуто в E_∞ и $f \in \mathfrak{C}(E_\infty^X)$, то множество $f(X)$ также замкнуто в E_∞.*

Обозначим через $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ подмножество пространства $\mathfrak{C}(E_\infty^X)$, состоящее из *неисчезающих вполне непрерывных полей на X*, т. е. положим: $\mathfrak{C}(P_\infty^X) = P_\infty^X \cap \mathfrak{C}(E_\infty^X)$.

(3,2). *Пусть X—замкнуто в E_∞. Для любого $f \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$, если число ε удовлетворяет неравенству $0 < \varepsilon < \varrho(f(X), 0)$ *), то из условия $|f - g| < \varepsilon$, $g \in \mathfrak{C}(E_\infty^X)$ вытекает, что $g \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$.*

Определение 1. Будем говорить, что поля $f, g \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$ *гомотопны в* $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ (пишем $f \simeq g$ в $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$), если существует отображение $H: X \times I \to E_\infty$ удовлетворяющее следующим условиям:

1°. отображение H вполне непрерывно на $X \times I$,

2°. $h(x,t) = x - H(x,t) \neq 0$ для любого $x \in X$ и $t \in I$,

3°. $h(x,0) = f(x)$, $h(x,1) = g(x)$ для любого $x \in X$.

Соотношение гомотопии разбивает пространство $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ на непересекающиеся гомотопические классы.

Теорема о продолжении гомотопии

4. Следующая теорема является аналогом для бесконечномерного случая известной теоремы Борсука о продолжении гомотопии [3]:

Теорема 1 (о продолжении гомотопии). *Пусть X_0—замкнутое подмножество множества $X \subset E_\infty$ и пусть $f_0, g_0 \in \mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$ причем $f_0 \simeq g_0$ в $\mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$. Если $f_0 \subset f \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$, то существует такое $g \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$, для которого $g_0 \subset g$ и кроме того $f \simeq g$ в $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$.*

Доказательство. Гомотопия вполне непрерывных неисчезающих полей

$$f_0(x) = x - F_0(x),$$

$$g_0(x) = x - G_0(x)$$

означает существование отображения H_0: $X_0 \times I \to E_\infty$ удовлетворяющего условиям:

$$\text{множество } H_0(X_0 \times I) \text{ компактно в } E_\infty,$$

$$x \neq H_0(x,t) \text{ для любого } x \in X_0 \text{ и } t \in I,$$

$$H_0(x,0) = F_0(x),\ H_0(x,1) = G_0(x) \text{ для любого } x \in X_0.$$

По предположению, поле f_0 можно продолжить на X до поля $f \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$, $f(x) = x - F(x)$, $F_0 \subset F$: $X \to E_\infty$.

---

*) $\varrho(f(X), 0)$ — обозначает расстояние множества $f(X)$ до точки 0.

Обозначим через T_0 подмножество топологического произведения $T=X\times I$, состоящее из точек $(x,t)\in T$ вида $x\in X$, $t=0$ и $x\in X_0$, $t\in I$ и определим отображение H_0^*: $T_0\to E_\infty$ по формулам:

$$H_0^*(x,0)=F(x) \quad \text{для} \quad x\in X,\ t=0,$$

$$H_0^*(x,t)=H_0(x,t) \quad \text{для} \quad x\in X_0,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Отображение H_0^* вполне непрерывно и в силу (2,2) существует вполне непрерывное отображение H^*: $T\to \operatorname{conv}(H_0^*(T_0))$, являющееся продолжением отображения H_0^* на T.

Пусть X_1 — подмножество X определяемое условием:

$$(x\in X_1)\equiv(x=H^*(x,t)) \quad \text{для некоторого} \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Множество X_1 замкнуто в X и не пересекается с множеством X_0. Пусть λ: $X\to I$ — функция Урысона равная нулю на X_1 и единице на X_0.

Полагая теперь для любого $x\in X$ и $t\in I$

$$H(x,t)=H^*(x,\lambda(x)t), \quad G(x)=H(x,1),$$

легко проверяем, что вполне непрерывное поле $g(x)=x-G(x)$ представляет собой искомое продолжение поля g_0 на X. Доказательство теоремы 1 тем самым закончено.

Продолжение по параметру

5. Будем рассматривать нелинейное уравнение вида:

$$x=F(x), \tag{4}$$

предполагая, что вполне непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор F: $X\to E_\infty$ определён в замкнутой ограниченной области $X\subset E_\infty$ и на границе $X_0=\operatorname{Fr}(X)$ удовлетворяет условию:

$$x\neq F(x) \quad \text{для всех} \quad x\in X_0. \tag{5}$$

Положим теперь для любого $x\in X_0$

$$f_0(x)=x-F_0(x) \tag{6}$$

где $F_0=F|X_0$.

Для того, чтобы сформулировать принцип продолжения по параметру введём понятие существенного и несущественного векторного поля.

Определение 2. Пусть X_0 — граница некоторой ограниченной области $X_1\subset E_\infty$. Неисчезающее вполне непрерывное поле $f_0\in\mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$ назовём *несущественным*, если существует продолжение $f\in\mathfrak{C}(P_\infty^{X})$ поля f_0 на множество $X=X_1\cup X_0$. В противном случае поле f_0 будем называть *существенным*.

Непосредственным следствием теоремы 1 является следующая:

Теорема 2. *Свойство существенности, а также несущественности вполне непрерывного неисчезающего векторного поля является инвариантом гомотопии.*

Принцип продолжения по параметру, заменяющий в приложениях известный принцип неподвижной точки Лере-Шаудера [8], мы можем теперь сформулировать в виде следующей теоремы, непосредственно вытекающей из теоремы 2:

Теорема 3 (о продолжении по параметру). *Если вполне непрерывное поле* $f_0 \in \mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$, *соответствующее уравнению* (4) *и определяемое по формуле* (6) *гомотопно в* $\mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$ *некоторому существенному полю* $g \in \mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$, *то уравнение* (4) *имеет по крайней мере одно решение, т. е.* $x_0 = F(x_0)$ *для некоторого* $x_0 \in X_1$.

Теорема об антиподах. Теоремы о неподвижных точках и другие следствия

6. Теорема 4 (об антиподах). *Если вполне непрерывное поле* $f_0 \in \mathfrak{C}(P_\infty^{S_\infty})$, $f_0(x) = x - F_0(x)$ *удовлетворяет условию нечётности:*

$$f_0(x) = -f_0(-x) \quad \text{при любом} \quad x \in S_\infty, \tag{7}$$

то оно существенно.

Доказательство. Предположим, что это не так и пусть $f_0 \subset f$, где $f \in \mathfrak{C}(P_\infty^{\bar{V}_\infty})$, $f(x) = x - F(x)$, $F_0 \subset F$: $\bar{V}_\infty \to E_\infty$. Пусть ε-какое-либо число, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < \varrho(f(\bar{V}_\infty), 0)$. В силу (2,1) существует конечномерное отображение F_ε: $\bar{V}_\infty \to E_n$, удовлетворяющее неравенству (1); кроме того, можно добиться, чтобы F_ε было нечётным на сфере S_∞ [7]. В силу (3,2) конечномерное поле $f_\varepsilon(x) = x - F_\varepsilon(x)$ не исчезает на $\bar{V}_\infty$; полагая $\bar{V}_n = E_n \cap \bar{V}_\infty$, $S_{n-1} = \mathrm{Fr}(\bar{V}_n)$, $f_n = f_\varepsilon | \bar{V}_n$ имеем f_n: $\bar{V}_n \to P_n$ *). Поле f_n по построению нечётно на сфере S_{n-1}, а это противоречит теореме об антиподах [2] для конечномерного случая. Теорема 4 доказана.

Теорему 4 можно при помощи теоремы 3 доказать в следующем более общем виде:

Теорема 4'. *Если вполне непрерывное поле* $f_0 \in \mathfrak{C}(P_\infty^{S_\infty})$, *удовлетворяет условию:*

$$f_0(x) \neq \lambda f_0(-x) \quad \text{при любом} \quad x \in S_\infty, \quad \lambda > 0, \tag{8}$$

то оно существенно.

*) P_n — обозначает пространство E_n без точки 0.

7. Из доказанных теорем вытекают непосредственно следующие известные теоремы о неподвижных точках:

Теорема Красносельского [7]. *Если вполне непрерывное поле* $f \in \mathfrak{C}(E_\infty^{\overline{V}_\infty})$, $f(x) = x - F(x)$ *удовлетворяет на границе* S_∞ *условию* (7) *или* (8), *то уравнение* (4) *имеет по крайней мере одно решение.*

Теорема Шаудера (о неподвижной точке) [10]. *Если вполне непрерывный оператор* $F\colon W \to W$ *переводит замкнутое выпуклое множество* W *в себя, то уравнение* (4) *имеет, по крайней мере, одно решение* $x_0 \in W$.

Теорема Роте [9]. *Если вполне непрерывный оператор* $F\colon \overline{V}_\infty \to E_\infty$ *удовлетворяет на границе шара* $\overline{V}_\infty$ *условию*:

$$\|F(x)\| \leqslant \|x\| \quad \text{для любого} \quad x \in S_\infty,$$

то уравнение (4) *имеет, по крайней мере, одно решение* $x \in \overline{V}_\infty$.

8. Приведём некоторые другие известные предложения, вытекающие непосредственно из теорем 3 и 4.

Пусть $X_1, X_2 \subset E_\infty$ и $\varepsilon < 0$. Непрерывное отображение $f\colon X_1 \to X_2$ назовём *ε-отображением*, если выполнено условие:

$$(\alpha) \qquad [f(x_1) = f(x_2)] \Rightarrow [\|x_1 - x_2\| < \varepsilon] \quad \text{для любых} \quad x_1, x_2 \in X_1$$

и *ε-отображением в узком смысле*, если для некоторой постоянной $\eta > 0$ выполнено условие:

$$(\beta) \quad [\|f(x_1) - f(x_2)\| < \eta] \Rightarrow [\|x_1 - x_2\| < \varepsilon] \quad \text{для любых} \quad x_1, x_2 \in X_1.$$

Теорема 5. *Пусть отображение* $f \in \mathfrak{C}(E_\infty^{\overline{V}_\infty})$, $f(x) = x - F(x)$ *является ε-отображением с постоянной ε равной единице. Тогда рассматриваемое на границе* S_∞ *неисчезающее вполне непрерывное поле* $f_0(x) = f(x) - f(0)$ *существенно.*

Доказательство. Рассмотрим на $S_\infty \times I$ функцию h определяемую по формуле:

$$h(x,t) = f\left(\frac{x}{1+t}\right) - f\left(-\frac{tx}{1+t}\right) = x - \left[F\left(\frac{x}{1+t}\right) - F\left(-\frac{tx}{1+t}\right)\right].$$

Так как f есть 1-отображение на $\overline{V}_\infty$, то $h(x,t) \neq 0$ для любого $(x,t) \in S_\infty \times I$; далее имеем $h(x,0) = f_0(x)$, $h(x,1) = g_0(x) = x - \left[F\left(\frac{x}{2}\right) - F\left(-\frac{x}{2}\right)\right]$. Так как поле g_0 нечётно на S_∞ и гомотопно в $\mathfrak{C}(P_\infty^{S_\infty})$ полю f_0, то утверждение теоремы 5 доказано.

В качестве следствий получаем следующие известные предложения:

Теорема Шаудера (об инвариантности области) [11]. *Пусть* O — *открытое множество расположенное в* E_∞, *а отображение* $f\colon O \to E_\infty$ *локально представимо в виде* (2). *Если f взаимно однозначно, то множество* $f(O)$ *открыто в* E_∞.

Теорема об ε-отображениях [1], [4]. *Пусть отображение* $f\colon E_\infty \to E_\infty$ *является* ε-*отображением. Если* f *представимо в виде* (2), *где* $F\colon E_\infty \to E_\infty$ *вполне непрерывный оператор на любом ограниченном множестве* $X \subset E_\infty$, *то множество* $f(E_\infty)$ *является областью в* E_∞.

Теорема об ε-отображениях в узком смысле [5]. *Если* $f\colon E_\infty \to E_\infty$ *есть* ε-*отображение в узком смысле и удовлетворяет предположениям предыдущей теоремы, то пространство* E_∞ *переходит при отображении* f *само на себя, т. е.* $f(E_\infty) = E_\infty$.

УНИВЕРСИТЕТ ИМ. НИКОЛАЯ КОПЕРНИКА, ТОРУНЬ

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Borsuk, *Über stetige Abbildungen der Euklidischen Räume*, Fund. Math. **21** (1933), 236-243.

[2] — *Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre*, Fund. Math., **21** (1933), 177-190.

[3] — *Sur les prolongements des transformations continues*, Fund. Math. **28** (1937), 99-110.

[4] А. Гранас, *О непрерывных отображениях открытых множеств в банаховых пространствах*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **6** (1958), 25-31.

[5] A. Granas, *Über einen Satz von K. Borsuk*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5** (1957), 959-962.

[6] W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory, Princeton, 1941.

[7] М. А. Красносельский, *К теории вполне непрерывных всюдных полей*, Укр. Мат. Журн., III, № 2, (1949).

[8] J. Leray, J. Schauder, *Topologie et équations fonctionelles*, Annales de l'École Normale Supérieure, **51**, (1934), 45-63.

[9] E. Rothe, *Theorie der topologischen Ordnung un der Vektorfeldern in Banachschen Räumen*, Comp. Math. **5** (1937), 177-197.

[10] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. **2** (1930), 170-179.

[11] — *Invarianz des Gebiets in Funktionalräumen*, Studia Math., **1** (1929), 123-139.

A. GRANAS, EXTENSION HOMOTOPY THEOREM IN BANACH SPACES AND SOME OF ITS APPLICATIONS TO THE THEORY OF NONLINEAR EQUATIONS

Let E_∞ be a Banach space, $P_\infty = E_\infty \setminus \{0\}$. If $X \subset E_\infty$, then we denote by $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ the set of all continuous mappings $f\colon X \to P_\infty$ which can be represented in the form

$$f(x) = x - F(x)\,,$$

where the mapping $F\colon X \to E_\infty$ is completely continuous on X.

Definition 1. Two mappings $f, g \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$ are called *homotopic* ($f \simeq g$ in $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$), if there exists a mapping $H\colon X \times I \to E_\infty$ (I-denotes the closed interval $[0,1]$) such that:

1^0. the set $H(X, I)$ is compact in E_∞,

2^0. $h(x, t) = x - H(x, t) \neq 0$ for every $x \in X$ and $0 \leqslant t \leqslant 1$.

3^0. $h(x, 0) = f(x)$, $h(x, 1) = g(x)$ for every $x \in X$.

Let $X_0 \subset X$, $f_0 \in \mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$, $f \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$. If the mapping f is an *extension* of f_0 on X, we write $f_0 \subset f$.

Extension Homotopy Theorem. *Let X_0 be a closed subset of $X \subset E_\infty$, $f_0, g_0 \in \mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$ and $f_0 \simeq g_0$ in $\mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$. If $f_0 \subset f \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$ then there exists a mapping $g \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$ such that $g_0 \subset g$ and $f \simeq g$ in $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$.*

Let X_0 be the boundary of a bounded domain X in E_∞.

Definition 2. A mapping $f_0 \in \mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$ is said to be *unessential if* $f_0 \subset f \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$; otherwise f is called *essential.*

Theorem of antipodes. *Let S_∞ be the unit sphere in E_∞ and $f \in \mathfrak{C}(P_\infty^{S_\infty})$. If $f(x) = -f(-x)$, for every $x \in S_\infty$, then f is essential.*

The basic topological facts, which are used in the theory of nonlinear equations in Banach spaces (as the fixed points theorems [10], [9], [7], invariance of domain theorem [11], continuous continuation method [8]) can be simply deduced from the theorems given above, without referring to the homology notions.

БЮЛЛЕТЕНЬ
ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
Серия мат., астр. и физ. наук
Том VII, № 7, 1959

МАТЕМАТИКА

А. ГРАНАС

О РАЗБИЕНИИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Представлено К. БОРСУКОМ 16 мая 1959

1. Обозначим через R_n — n-мерное евклидово пространство, $\mathring{R}_n$ — пространство R_n без точки 0, а через X замкнутое и ограниченное множество, расположенное в R_n *).

В 1931 году К. Борсук доказал в работе [1] следующую теорему о разбиении евклидовых пространств:

Для того, чтобы множество X не разбивало пространства R_n, необходимо и достаточно, чтобы любые два отображения $f, g \in \mathring{R}_n^X$ были гомотопны **).

Основным результатом настоящей работы является теорема 2, которая представляет собой перенесение сформулированного предложения Борсука на случай банаховых пространств. Доказательство теоремы 2 элементарно (оно не использует понятий теории гомологий) и основано на применении теоремы Шаудера о неподвижной точке [7] и теоремы о продолжении гомотопии для банаховых пространств [4].

2. Введем некоторые обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем: E_∞ — бесконечномерное банахово пространство, E_n — n-мерное подпространство пространства E_∞, P_∞ пространство E_∞ без точки 0, $P_n = E_n \setminus \{0\}$.

Пусть X какое-либо метрическое пространство. Непрерывное отображение $F\colon X \to E_\infty$ называем *вполне непрерывным* на X, если множество $F(X)$

---

*) Для произвольных метрических пространств X, Y через Y^X обозначаем множество всех непрерывных отображений пространства X в Y, через $X \times Y$ топологическое произведение этих пространств. Гомотопия отображений $f, g \in Y^X$ означает существование функции $h \in Y^{X \times I}$ (I — замкнутый отрезок $[0,1]$), для которой при любом $x \in X$ имеем $h(x,0) = f(x)$, $h(x,1) = g(x)$. В дальнейшем запись $f_0 \subset f \in Y^X$, где $f_0 \in Y^{X_0}$, $X_0 \subset X$ означает, что f является продолжением f_0 на X, т. е. $f(x) = f_0(x)$ при любом $x \in X_0$; будем писать также $f_0 = f|X_0$.

**) Отметим, что для удобства мы несколько видоизменили оригинальную формулировку теоремы Борсука, заменив пространство отображений S_{n-1}^X множества X в $(n-1)$-мерную сферу S_{n-1} пространством $\mathring{R}_n^X$.

компактно в E_∞; если, кроме того, значения отображения F принадлежат некоторому подпространству $E_n \subset E_\infty$, т. е. $F\colon X \to E_n$, то F называем *конечномерным* отображением на X.

Имеет место следующее предложение о продолжении вполне непрерывных отображений:

(2,1). *Если X_0 замкнутое подмножество X и отображение $F_0\colon X_0 \to E_\infty$ вполне непрерывно, то существует вполне непрерывное отображение $F\colon X \to \operatorname{conv}(F_0(X_0))$ такое, что $F_0 \subset F$* *).

Пусть теперь $X \subset E_\infty$. Непрерывное отображение $f\colon X \to E$ будем называть *вполне непрерывным векторным полем на X*, если оно допускает представление вида:

$$f(x) = x - F(x)\,,$$

где отображение $F\colon X \to E_\infty$ вполне непрерывно на X; если отображение F конечномерно, то f будем называть *конечномерным полем на X*.

Совокупность вполне непрерывных векторных полей на X обозначим через $\mathfrak{C}(E_\infty^X)$, совокупность же конечномерных полей на X через $\mathfrak{C}_0(E_\infty^X)$.

Множество $\mathfrak{C}(E_\infty^X)$ будем рассматривать как метрическое пространство, определяя расстояние $|f-g|$ элементов $f, g \in \mathfrak{C}(E_\infty^X)$ по формуле:

$$|f-g| = \sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|\,.$$

Так как *любое вполне непрерывное отображение можно равномерно аппроксимировать конечномерными отображениями* (см. [5]), то мы получаем:

(2,2) *Множество $\mathfrak{C}_0(E_\infty^X)$ плотно в $\mathfrak{C}(E_\infty^X)$.*

Далее имеет место следующее предложение:

(2,3) *Если X замкнуто и $f \in \mathfrak{C}(E_\infty^X)$, то $f(X)$ также замкнуто.*

Предположим теперь, что множество $X \subset E_\infty$ замкнуто и положим:

$$\mathfrak{C}(P_\infty^X) = P_\infty^X \cap \mathfrak{C}(E_\infty^X); \qquad \mathfrak{C}_0(P_\infty^X) = P_\infty^X \cap \mathfrak{C}_0(E_\infty^X)\,.$$

Элементы пространства $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ будем называть *неисчезающими вполне непрерывными полями на X*. Из (2,2) и (2,3) следует:

(2,4) *Множество $\mathfrak{C}_0(P_\infty^X)$ плотно в $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$.*

3. Введем теперь основное для дальнейшего понятие гомотопии элементов пространства $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$.

Будем говорить, что неисчезающие векторные поля $f, g \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$ *гомотопны* (пишем ($f \simeq g$ в $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$), если существует отображение $H\colon X \times I \to E_\infty$, которое удовлетворяет следующим условиям:

*) Это предложение является весьма частным случаем общей теоремы о продолжении непрерывных функций, доказанной Дугунди [2]; символ $\operatorname{conv}(F_0(X_0))$ обозначает наименьшее замкнутое выпуклое множество содержащее $F_0(X_0)$.

1°. отображение H вполне непрерывно на $X\times I$,
2°. функция $h(x,t)=x-H(x,t)\neq 0$ для любого $x\in X$ и $t\in I$,
3°. $h(x,0)=f(x)$, $h(x,1)=g(x)$ для любого $x\in X$.

Пространство $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ распадается благодаря соотношению гомотопии на непересекающиеся классы гомотопных полей.

Имеют место следующие предложения:

(3,1). *Если* $X_0\subset X$ *и* $f,g\in\mathfrak{C}(P_\infty^X)$, *то из* $f\simeq g$ *в* $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ *следует* $f|X_0\simeq g|X_0$ *в* $\mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$.

(3,2). *Если* $f\in\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ *и число* ε *таково, что* $0<\varepsilon<\varrho(0,f(X))$ **), то из* $|f-g|<\varepsilon$, $g\in\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ *следует* $f\simeq g$ *в* $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$.

Из (2,4) и (3,2) следует:

(3,3). *Любое вполне непрерывное поле* $f\in\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ *гомотопно некоторому конечномерному полю* $g\in\mathfrak{C}_0(P_\infty^X)$.

Пользуясь (3,3) доказываем следующее предложение:

(3,4) *Если* X *— какой-либо замкнутый шар пространства* E_∞, *то для любых* $f,g\in\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ *имеем* $f\simeq g$ *в* $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$.

Имеет место следующая:

Лемма 1 (о продолжении гомотопии). *Пусть* X_0 *— замкнутое подмножество множества* $X\subset E_\infty$, $f_0,g_0\in\mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$ *причём* $f_0\simeq g_0$ *в* $\mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$. *Если* $f_0\subset f\in\mathfrak{C}(P_\infty^X)$, *то существует такое* $g\in\mathfrak{C}(P_\infty^X)$, *для которого* $g_0\subset g$ *и* $f\simeq g$ *в* $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$.

Доказательство леммы 1 приведено в работе автора [4].

4. Пусть X_0 — граница некоторой ограниченной замкнутой области $X\subset E_\infty$ и на X_0 задано векторное поле $f_0\in\mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$.

Будем говорить, что поле $f_0\in\mathfrak{C}(P_\infty^{X_0})$ *несущественно*, если для некоторого $f\in\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ имеем $f_0\subset f$; в противном случае будем говорить, что поле f_0 *существенно*.

Из теоремы Шаудера о неподвижной точке [7] легко выводится следующая:

Лемма 2. *Если* x_1 *является внутренней точкой области* X, *то рассматриваемое на* X_0 *неисчезающее вполне непрерывное поле* $x-x_1$ *является существенным.*

Мы говорим, что множество $X\subset E_\infty$ *отделяет* точки $x_1,x_2\in E_\infty\setminus X$ в пространстве E_∞, если эти точки принадлежат различным компонентам дополнения $E_\infty\setminus X$.

Пусть X — замкнутое и ограниченное подмножество пространства E_∞ и $x_1,x_2\in E_\infty\setminus X$.

---

*) $\varrho(0,f(X))$ — означает расстояние множества $f(X)$ до точки 0.

Теорема 1 (об отделении точек в банаховом пространстве). *Для того, чтобы множество X не отделяло точек $x_1, x_2 \in E_\infty \setminus X$ в пространстве E_∞ необходимо и достаточно, чтобы неисчезающие вполне непрерывные векторные поля $(x-x_1)|X$, $(x-x_2)|X$ были гомотопны в $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$* *).

Теорема 1 доказывается при помощи леммы 1 и 2.

5. Мы говорим, что множество $X \subset E_\infty$ *разбивает* пространство E_∞, если дополнение $E_\infty \setminus X$ несвязно.

Пусть X — ограниченное и замкнутое подмножество пространства E_∞. Имеет место следующая:

Лемма 3. *Если множество X не разбивает пространства и X^*—какой-либо замкнутый шар пространства E_∞ содержащий X, то для любого поля $f \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$ существует поле $f^* \in \mathfrak{C}(P_\infty^{X^*})$, для которого $f \subset f^*$.*

Основным результатом настоящей работы является следующая:

Теорема 2 (о разбиении банаховых пространств). *Для того, чтобы замкнутое и ограниченное множество $X \subset E_\infty$ не разбивало банахова пространства E_∞, необходимо и достаточно, чтобы любые два неисчезающие вполне непрерывные векторные поля $f, g \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$ были гомотопны в $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$.*

Необходимость условия теоремы 2 вытекает из леммы 2 и предложений (3,1) и (3,4), достаточность же следует из теоремы 1.

6. Пусть теперь отображение $h \in \mathfrak{C}(E_\infty^X)$ будет гомеоморфизмом множества X на множество $X^* = h(X)$. Очевидно, что *если пространство $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$ состоит из одного класса гомотопии, то этим же свойством обладает пространство $\mathfrak{C}(P_\infty^{X^*})$*. Отсюда и из Теор. 2 имеем:

Следствие. *Если множество X разбивает банахово пространство E_∞ и отображение $h \in \mathfrak{C}(E_\infty^X)$ является гомеоморфизмом, то образ $h(X)$ множества X при отображении h также разбивает пространство E_∞* **).

Полные доказательства приведенных теорем будут опубликованы в журнале „Fundamenta Mathematicae".

УНИВЕРСИТЕТ ИМ. НИКОЛАЯ КОПЕРНИКА, ТОРУНЬ

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Borsuk, *Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume*, Math. Ann. **106** (1932), 239-248.

[2] J. Dugundji, *An extension of Tietzes theorem*, Pacific J. Math. **1** (1951), 353-367.

*) Эта теорема в конечномерном случае известна как *критерий Борсука отделимости точек в евклидовом пространстве* (см. [3], стр. 302).

**) Приведенное следствие представляет собой качественную часть теоремы Жордана для банаховых пространств, доказанной Ж. Лере в работе [6]. Доказательство Лере основано на применении теории степени отображения [5].

[3] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton, 1952.

[4] А. Гранас, *Теорема о продолжении гомотопии в банаховых пространствах и её некоторые применения в теории нелинейных уравнений*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. of phys. **7** (1959), 387-394.

[5] J. Leray, J. Schauder, *Topologie et équations fonctionelles*, Annales de l'École Normale Sup., **51** (1934), 45-63.

[6] J. Leray, *Topologie des espaces abstraits de M. Banach*, C. R. de l'Acad. des Sci. Paris, **200** (1935), 1082.

[7] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. **1** (1929), 170-179.

A. GRANAS. ON THE DISCONNECTION OF BANACH SPACES

Let E_∞ be a Banach space, $P_\infty = E_\infty \setminus \{0\}$. If $X, Y \subset E_\infty$ then we denote by $\mathfrak{C}(Y^X)$ the set of all continuous mappings $f\colon X \to Y$ which can be represented in the form

$$f(x) = x - F(x),$$

where the mapping $F\colon X \to E_\infty$ is completely continuous on X (i.e. $F(X)$ is compact in E_∞).

Two mappings $f, g \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$ are called *homotopic* ($f \simeq g$ in $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$), if there exists a mapping $H\colon X \times I \to E_\infty$ (I-denotes the closed interval [0,1]) such that:

1°. the set $H(X \times I)$ is compact in E_∞,

2°. $h(x,t) = x - H(x,t) \neq 0$ for every $x \in X$ and $t \in I$,

3°. $h(x,0) = f(x)$, $h(x,1) = g(x)$.

If the points $x_1, x_2, \in X$ belong to the same component of the metric space X, then we shall write $x_1 \sim x_2$ in X.

Let X be a closed and bounded subset of the Banach space E_∞.

THEOREM 1. (Criterion of separation between two points). *Let $x_1, x_2 \in E_\infty \setminus X$. Then we have the equivalence*

$$\{x_1 \sim x_2 \text{ in } E_\infty \setminus X\} \equiv \{(x - x_1)|X \simeq (x - x_2)|X \text{ in } \mathfrak{C}(P_\infty^X)\}.$$

THEOREM 2. (On disconnection of Banach spaces). *The set $E_\infty \setminus X$ is connected, if and only if for every $f, g \in \mathfrak{C}(P_\infty^X)$ we have $f \simeq g$ in $\mathfrak{C}(P_\infty^X)$.*

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 7, 1959

MATHEMATICS

A Class of Models for Second Order Arithmetic

by

A. MOSTOWSKI

Presented on May 15, 1959

Let S be the formal system of analysis (i. e. arithmetic of integers based on a second order logic) considered in [3]. A *frame* for S is defined as in [3], p. 190; *models* of S are frames in which all axioms of S are true. Models $\mathfrak{p}$ in which $N_{\mathfrak{p}}$ is isomorphic to the set N_0 of integers and $0_{\mathfrak{p}}$, $1_{\mathfrak{p}}$, $+_{\mathfrak{p}}$, $\times_{\mathfrak{p}}$ are isomorphic images of 0, 1, addition, and multiplication are called ω-models of S. We identify $N_{\mathfrak{p}}$ with N_0 and denote the ω-models briefly by $\langle N_0, F^1_{\mathfrak{p}}, F^2_{\mathfrak{p}}, \ldots\rangle$. An ω-model $\mathfrak{p}$ is called *denumerable* if $F^j_{\mathfrak{p}}$ is denumerable for $j = 1, 2, \ldots$ If $F^j_{\mathfrak{p}} = N_0^{(N_0^j)}$ for $j = 1, 2, \ldots$, then $\mathfrak{p}$ is called the principal model of S and is denoted by $\mathfrak{p}_0$.

Par. 3 of [3] was devoted to a study of ω-models of S. In the present paper a number of results is announced pertaining to another (narrower) class of models which will be called β-models or models absolute for well orderings.

Let $\mathrm{Ord}(\alpha^2)$ and $\mathrm{Bord}(\alpha^2)$ be the following formulas:

$$(x, y, z)\{[\alpha^2(x, x) = 0] \,\&\, [\alpha^2(x, y) = 0 \vee \alpha^2(y, x) = 0]$$
$$\&\, [\alpha^2(x, y) \neq 0 \vee \alpha^2(y, x) \neq 0 \vee x = y] \,\&\, [\alpha^2(x, y) \neq 0 \vee \alpha^2(y, z) \neq 0 \vee \alpha^2(x, z) = 0]\};$$

$$(\beta^1)(Ex)[\alpha^2(\beta^1(x+1), \beta^1(x)) \neq 0 \vee \beta^1(x+1) = \beta^1(x)] \,\&\, \mathrm{Ord}(\alpha^2).$$

One shows easily that if $\mathfrak{p}$ is any frame, $\varphi \in F^2_{\mathfrak{p}}$ and the relation $\varphi(a, b) = 0_{\mathfrak{p}}$ well orders $N_{\mathfrak{p}}$, then $\mathrm{Bord}_{\mathfrak{p}}(\varphi) = V$, i. e. φ satisfies the formula $\mathrm{Bord}(\alpha^2)$ in $\mathfrak{p}$.

DEFINITION. $\mathfrak{p}$ is *β-model* if, for every φ in $F^2_{\mathfrak{p}}$, from $\mathrm{Bord}_{\mathfrak{p}}(\varphi) = V$ it follows that the relation $\varphi(a, b) = 0_{\mathfrak{p}}$ well orders $N_{\mathfrak{p}}$.

For every set X of closed propositional formulas we denote by $Cn_\beta(X)$ the set of closed propositional formulas Φ such that $Val_{\mathfrak{p}}(\Phi) = V$ for every β-model $\mathfrak{p}$ in which all formulas of X are true. We also put

$A_\beta = Cn_\beta(Ax)$, where Ax is the set of axioms of S; the same symbol A_β is used to denote the system of analysis based on Cn_β as its derivability operation.

1. *Every β-model is an ω-model.*

Proof. The formula $(x, y)[\alpha^2(x, y) = 0 \equiv x \leqslant y] \supset \mathrm{Bord}(\alpha^2)$ is provable in S.

2. *For every β-model* $\mathfrak{p}$ *there is a denumerable β-model* $\mathfrak{p}_1$ *such that* $\mathfrak{p}$ *is an arithmetical extension* (cf. [10]) *of* $\mathfrak{p}_1$.

This is an analogue of the Skolem-Löwenheim theorem and is proved by the standard technique of successive extensions (cf. [9]) using the axiom of choice.

Let $\lambda_k: x \rightleftarrows \langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ be a recursive one — one mapping of k-tuples of integers onto integers. Every function $\mu \in N_0^{N_0}$ (i. e. a mapping of N_0 into N_0) determines a frame $\mathfrak{p}_\mu = \langle N_0, F_\mu^1, F_\mu^2, \ldots\rangle$, where F_μ^j is the set

$$\left\{g \in N_0^{(N_0^j)}\colon (\mathrm{E}k)(x_1, \ldots, x_j)\left[g(x_1, \ldots, x_j) = \mu(\lambda_{j+1}(k, x_1, \ldots, x_j))\right]\right\}.$$

3. *If f is a valuation with respect to $\mathfrak{p}_\mu$, then the predicate $Val_{f,\mathfrak{p}_\mu}(\Gamma) = v$ is hyperarithmetic* [5] *in μ, f, $\mathrm{N}^0\Gamma$, and v.*

To prove this Theorem we analyze the definition of the function *Val* (cf. [3], p. 190) and reduce the predicate in question to either of the forms $(\varphi)R(\varphi, f, \mu, \mathrm{N}^0\Gamma, v)$ or $(\mathrm{E}\varphi)S(\varphi, f, \mu, \mathrm{N}^0\Gamma, v)$, where R and S are arithmetical in their arguments. The technique of [6] is used in this reduction.

4. *The predicates* $\mathrm{Mod}(\mu)$ *and* $\mathrm{Mod}_\omega(\mu)$ *defined as "$\mathfrak{p}_\mu$ is a model of S", and "$\mathfrak{p}_\mu$ is an ω-model of S" are hyperarithmetic; the predicate* $\mathrm{Mod}_\beta(\mu)$ *defined as "$\mathfrak{p}_\mu$ is a β-model of S" is of class* $\prod_1^1$ (cf. [1]).

Theorem 4 is an easy corollary of 3.

5. *If X is a set of closed formulas and N^0X is in $\prod_2^1$, then $\mathrm{N}^0Cn_\beta(X)$ is in $\prod_2^1$; in particular N^0A_β is in $\prod_2^1$.*

Theorem 5 is proved by a straightforward evaluation of the predicate $a \in \mathrm{N}^0Cn_\beta(X)$ using 2 and 4.

6. *The predicate $a \in \mathrm{N}^0A_\beta$ is universal* (i. e. complete in the sense of Post) *for the class* $\prod_2^1$.

Proof of Theorem 6 used notions borrowed from the theory of sieves (cf. e. g. [6]) *). If $a \in Z \equiv (\varphi)(\mathrm{E}\psi)(x)K(\overline{\varphi}(x), \overline{\psi}(x), a)$, then we can construct an ordering relation $L_{\varphi,a}$ uniformly recursive in K, φ, a such that

(1) $\{L_{\varphi,a}$ *is not a well ordering*$\} \equiv \{(\mathrm{E}\psi)(x)K(\overline{\varphi}(x), \overline{\psi}(x), a)\}$.

*) Kleene's techniques described in [4] could be used as well.

If K is recursive, then $L_{\varphi,a}$ is recursive in φ and a and hence the left hand side of (1) can be "expressed" by a formula $\mathrm{Bord}(\Gamma(\alpha^2, \mathrm{x}))$, where Γ is a term of S. One shows that $\{a \in Z\} = \{(\alpha^2)\mathrm{Bord}(\Gamma(\alpha^2, \mathbf{a})) \in A_\beta\}$ which concludes the proof of 6.

7. *If $\Phi(\alpha^k, \beta^l)$ is an elementary formula* (cf. [3], p. 189) *and $(\alpha^k)(\mathrm{E}\beta^l)\Phi$ is true in the principal model $\mathfrak{p}_0$ of S, then $(\alpha^k)(\mathrm{E}\beta^l)\Phi \in A_\beta$.*

Proof uses the same device as in 6.

8. *There is an elementary formula $\Phi_0(\alpha^1, \beta^1)$ such that $(\mathrm{E}\alpha^1)(\beta^1)\Phi_0$ is true in the principal model but does not belong to A_β.*

This follows from 5 and 6. Also from 5 and 6 we obtain.

9. *The family of sets representable in A_β* (cf. [3], p. 194) *coincides with $\prod_2^1$.*

10. *If X is strongly representable in A_β, then $X \in \prod_1^1 \cap \sum_2^1$.*

11. *There are sets in $\prod_2^1 \cap \sum_2^1$ which are not strongly representable in A_β.*

Proof of 11 is based on the Novikov-Addison separation theorem for the class $\prod_2^1$ (cf. [8] and [1]). Starting with the $\prod_2^1$ – sets $X_1 = \mathrm{N}^0 A_\beta$ and $X_2 = \{\mathrm{N}^0\Phi : \sim\Phi \in A_\beta\}$ we construct a set Z in $\prod_2^1 \cap \sum_2^1$ which separates X_1 and X_2 and prove as in [3], p. 195 that Z is not strongly representable in A_β.

Two applications of Theorem 7 will still be mentioned. Let G_ξ be the set of all constructible sets (cf. [2]) of order $< \xi$, i. e. $G_\xi = \{F_\alpha : \alpha < \xi\}$. It is not difficult to show that there exist arbitrarily large $\xi_0 < \Omega$ such that G_{ξ_0} is a model for the Zermelo-Fraenkel set-theory *). The family of all functions ϑ in $[\bigcup_j N_0^{(N_0^j)}] \cap G_{\xi_0}$ being denumerable, there exists a function μ_0 in N_0^N such that $F_{\mu_0}^j = N_0^{(N_0^j)} \cap G_{\xi_0}$. By an elementary though somewhat lengthy verification we prove the following

Lemma. *$\mathfrak{p}_{\mu_0}$ is a β-model for S.*

From 7 and the lemma we obtain

12. *If $\Phi(\alpha^k, \beta^l)$ is an elementary formula and if the formula $(\alpha^k)(\mathrm{E}\beta^l)\Phi$ is true in the principal model, then for every constructible function φ there is a constructible function ψ such that $\Phi_{\mathfrak{p}}(\varphi, \psi) = V$ for every ω-model $\mathfrak{p}$ to which φ and ψ belong.*

J. R. Shoenfield has shown recently that a similar theorem holds for formulas $(\mathrm{E}\alpha^k)(\beta^l)\Phi$ which are true in the principal model.

13. *The family $\prod_2^1 \cap \sum_2^1$ does not coincide with the family of constructible sets of integers.*

Theorem 13 which settles negatively a conjecture of Addison is proved by reduction ad absurdum. If it were false the axiom of com-

*) This theorem seems to be generally known although to the author's knowledge no proof of it has appeared. An explicit statement of the theorem is given in [7].

prehension would be true in $\prod_2^1 \cap \sum_2^1$; in [7], a condition (C) for a class K of sets is stated such that the axiom of comprehension is false in classes K satisfying (C). Using Theorem 12 we show that condition (C) is satisfied for $K = \prod_2^1 \cap \sum_2^1$ (one takes $\Phi(n) = \{a : (\varphi)(\mathrm{E}\psi)(x)\, R_n(\overline{\varphi}(x), \overline{\psi}(x), a)\}$, where R_n is a recursive enumeration of all primitive recursive relations with 3 arguments).

It is an unsolved problem, how to characterize syntactically (though not necessarily in a finitary way) rules of proof which would enable one to prove all formulas of $Cn_\beta(X)$ starting from formulas of X. In case of the function Cn_ω of [3] the so-called rule ω provides a satisfactory answer.

A part of this paper was written while the author was a visiting professor at the University of California, Berkeley, California, U.S.A.

REFERENCES

[1] J. W. Addison, Fund. Math. **46** (1959), 123-135.

[2] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set-theory*. Annals of Math. Stud., No. 3, 2nd ed. Princeton, 1951.

[3] A. Grzegorczyk, A. Mostowski, C. Ryll-Nardzewski, Journal Symb. Logic, **23** (1958), 188-206.

[4] S. C. Kleene, Am. Journal of Math. **77** (1955), 405-428.

[5] — Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 312-340.

[6] K. Kuratowski, *Topologie* I, 3rd ed., Monogr. Matem., vol. III Warszawa—Wrocław, 1957.

[7] A. Mostowski, in *Constructivity in Mathematics*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1959.

[8] P. S. Novikov, Fund. Math. **25** (1935), 459.

[9] Th. Skolem, Skrifter Videnskapsselskapet Kristiania (1919), No. 4, 1-16.

[10] A. Tarski and R. L. Vaught, Comp. Math. **18** (1957), 81-102.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 7, 1959

MATHEMATICS

On a Restricted ω-Rule

by

J. R. SHOENFIELD

Presented by A. MOSTOWSKI on May 15, 1959

According to results of Gödel, formalized arithmetic is incomplete, in the sense that some true statements are unprovable, and it remains incomplete upon the addition of any effective valid rule of inference. On the other hand, it becomes complete upon the addition of the non-effective ω-rule, which reads: if $A(0), A(1), \ldots$, then $(x)A(x)$.

Various suggestions have been proposed for modifying the ω-rule to make it more nearly effective. One such suggestion *) is that we require the existence of an effective method of obtaining a proof of $A(n)$ when n is given. We shall show that this rule is no less powerful than the ω-rule, i.e. it suffices to prove all true arithmetical sentences.

We first formulate the rule precisely. Let Z_μ be the formal system of arithmetic of [1], § 8. We write A and B for sentences of Z_μ, and t for a term of Z_μ. Sometimes we also indicate the free variables in these expressions, e.g., $A(x, y)$, $t(x)$. We write $\overline{n}$ for the numeral of Z_μ having the value n.

We assume that Gödel numbers have been assigned to the sentences of Z_μ, as in [1], and to the partial recursive functions, as in [2]. We may assume that 0 is not the number of a recursive function. We write $\ulcorner A \urcorner$ for the Gödel number of the sentence A.

We now define the notion of a *number of a proof in* Z^*. For $0 \leqslant i \leqslant k$, let $s_i = 2^{a_i} 3^{b_i}$, where $a_i = \ulcorner A_i \urcorner$ and b_i is 0 or the number of a recursive function. We say that **) $s = p_0^{s_0} p_1^{s_1} \ldots p_k^{s_k}$ is a number of a proof in Z^* of A_k if the following conditions hold for $i \leqslant k$: (i) if $b_i = 0$, then A_i is an axiom of Z_μ or a logical consequence of certain A_j with $j < i$; (ii) if $b_i \neq 0$,

*) This rule was suggested by Novikoff in a somewhat different context. A similar rule was also investigated by Parsons [4].

**) We use the notation of [2] for recursive functions. In particular, $p_0, p_1, \ldots$ is the sequence of primes, and $\{e\}(n)$ is the value of the partial recursive function with Gödel number e at the argument n.

then A_i is of the form $(x)A(x)$, and for each n, $\{b_t\}(n)$ is the number of a proof in Z^* of $A(\bar{n})$ *). We say A is *provable in* Z^* if there is a number of a proof in Z^* of A.

We assume that definitions of all primitive recursive functions have been introduced in Z_μ. Suppose that $A(x, y)$ is quantifier free (except for quantifiers appearing in the definitions of primitive recursive functions). Then $A(x, y)$ represents in a natural way a primitive recursive dyadic predicate.

We sometimes write $x \leqslant_A y$ for $A(x, y)$ and $x <_A y$ for $x \leqslant_A y \,\&\, x \neq y$. If $x \leqslant_A y$ is quantifier free, and if the sentence of Z_μ which states that $\leqslant_A$ is a linear ordering is provable in Z_μ, we say that $x \leqslant_A y$ is an *ordering sentence*. If, in addition, the predicate represented by $x \leqslant_A y$ is a well ordering, we say that $x \leqslant_A y$ is a *well ordering sentence*. Then the following lemma is proved in § 6 of [3].

LEMMA 1. *If* B *is a sentence of* Z_μ, *there is an ordering sentence* $x \leqslant_A y$ *and a term* $t(x)$ *such that* $(Ex)(\neg t(x+1) <_A t(x)) \rightarrow B$ *is provable in* Z_μ. *If* B *is true, then* $x \leqslant_A y$ *is a well ordering sentence.*

We write $x \leqslant_{A,z} y$ for $x \leqslant_A y \,\&\, y <_A z$.

If $x \leqslant_A y$ *is an ordering sentence, then*

$$(1) \quad (z)\big(z \leqslant_A z \rightarrow (Ex)(\neg t(x+1) <_{A,z} t(x))\big) \rightarrow (Ex)(\neg t(x+1) <_A t(x))$$

is provable in Z_μ. In fact, the hypothesis implies that either $\neg t(0) \leqslant_A t(0)$ or $(Ex)(\neg t(x+1) <_{A,t(0)} t(x))$; in either case, the conclusion follows.

We let β be the recursive function defined by

$$\beta(\ulcorner x \leqslant_A y \urcorner, n) = \ulcorner x \leqslant_{A,\bar{n}} y \urcorner .$$

LEMMA 2. *Let* $t(x)$ *be a term of* Z_μ. *Then there is a partial recursive function* $\gamma(k, e)$ *satisfying the following condition: if* $k = \ulcorner x \leqslant_A y \urcorner$, *where* $x \leqslant_A y$ *is an ordering sentence, and, if for every* n *in the field of* $\leqslant_A$, $\{e\}(n)$ *is a number of a proof in* Z^* *of*

$$(2) \qquad (Ex)(\neg t(x+1) <_{A,\bar{n}} t(x)),$$

then $\gamma(k, e)$ *is a number of a proof in* Z^* *of*

$$(3) \qquad (Ex)(\neg t(x+1) <_A t(x)).$$

Proof. Let k and e be given. Since $x \leqslant_A y$ is quantifier free, we can decide for each n whether or not n is in the field of $\leqslant_A$. If it is not in the ield of $\leqslant_A$, we can obtain a proof in Z_μ of

$$(4) \qquad \bar{n} \leqslant_A \bar{n} \rightarrow (Ex)(\neg t(x+1) <_{A,\bar{n}} t(x)).$$

*) This is to be considered as an inductive definition; i. e., the class of numbers of proofs in Z^* is the smallest class of numbers satisfying the definition.

If n is in the field of $\leqslant_A$, $\{e\}(n)$ is a number of a proof in Z* of (2), so we can obtain a number of a proof in Z* of (4). Thus we obtain a Gödel number f of a recursive function such that for each n, $\{f\}(n)$ is a number of a proof in Z* of (4). Since we can also obtain a proof in Z_μ of (1), we can obtain a number of a proof in Z* of (3).

THEOREM. *If* B *is a true sentence of* Z_μ, *then* B *is provable in* Z*.

Proof. Given a term t(x), we shall define a partial recursive function a such that if $k = \ulcorner x \leqslant_A y \urcorner$, where $x \leqslant_A y$ is a well ordering sentence, then $a(k)$ is a number of a proof in Z* of (3). The theorem will then follow by Lemma 1.

Let β and γ be as above. Let f be a Gödel number of $\{g\}(\beta(k, n))$ as a function of (g, k, n). By the recursion theorem, there is a partial recursive function a with Gödel number g_0 such that for all k

$$a(k) \simeq \gamma\left(k, S_1^2(f, g_0, k)\right).$$

We prove a has the desired property by transfinite induction on the ordinal of $x \leqslant_A y$. By induction hypothesis, the hypothesis of Lemma 2 is satisfied with $e = S_1^2(f, g, k)$. Hence, by Lemma 2, $a(k)$ is a number of a proof in Z* of (3).

For each ordinal σ, define a class S_σ of sentences as follows. S_0 is the class of provable sentences of Z_μ. $S_{\sigma+1}$ is the class of sentences which are provable from sentences of S_σ by the ω-rule, together with their logical consequences. If σ is a limit number, $S_\sigma = \bigcup_{\tau<\sigma} S_\tau$. As is well known, S_ω is the class of true sentences of Z_μ. If we replace the ω-rule by the restricted ω-rule, then the above proof with the considerations of [3] shows that S_{ω^ω} is the class of true sentences of Z_μ. It seems unlikely that this result can be improved.

Similar considerations applied to formalized analysis (i.e., Z_μ with free and bound function variables added) show that the restricted ω-rule suffices to prove all true sentences of the form $(a_1) \ldots (a_n)A$, where A contains no bound function variables. However, we do not know if it suffices to prove all sentences which are provable by the full ω-rule.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, USA

REFERENCES

[1] D. Hilbert and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, Berlin. 1934.

[2] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, New York, Toronto, Amsterdam, and Groningen, 1952.

[3] G. Kreisel, J. Shoenfield and H. Wang, *Number theoretic concepts and recursive well orderings*, to appear in Arch. Math. Logik Grundlagenforsch.

[4] C. Parsons, *Elimination of a restricted infinite induction*, Abstract, Journal of Symbolic Logic, **23** (1958), 106.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 7, 1959

MATHÉMATIQUE

Sur une généralisation du théorème de Noether

par

C. JANKIEWICZ

Présenté par H. STEINHAUS le 19 mai 1959

Supposons que dans l'espace numérique à n dimensions aux coordonnées x^α un groupe continu d'ordre ϱ des transformations du point soit donné. Le premier théorème de Noether [1] peut être énoncé comme suit: si un comitant géométrique à une composante est une densité scalaire de poids $(+1)$ et qu'il satisfait aux équations d'Euler-Lagrange, alors il existe ϱ lois de conservation exprimées sous la forme d'une divergance. Cet énoncé du théorème, où l'on n'utilise pas la notion d'invariante intégrale, conduit à la généralisation suivante: chaque comitant géométrique à M composantes satisfaisant aux équations d'Euler-Lagrange admet $\varrho \cdot M$ lois de conservation généralisées; ces lois n'ont pas la forme des divergences. Dans le cas particulier, où le comitant représente une densité scalaire de poids $(+1)$ on obtient ϱ lois ordinaires de conservation pour la correspondante invariante intégrale; quand le comitant est une fonction scalaire, l'intégrale n'étant pas invariante, on a ϱ lois de conservation généralisées.

Soit $\psi_A(x^\nu)$, $A = 1, 2, \ldots, N$ un object géométrique avec les lois de transformations, que nous écrivons tout court sous la forme

$$\psi_{A'} = G_{A'}(\psi_A, x^\nu, x^{\nu'}) . \tag{1}$$

(Les indices grecques parcourent les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$) La dérivée de Lie de l'objet ψ_A par rapport à un groupe d'ordre ϱ

$$'x^\nu = x^\nu + Dx^\nu , \qquad Dx^\nu = \sum_{i=1}^{\varrho} \theta_i^\nu \varepsilon^i \tag{2}$$

est définie [2] par

$$D\psi_A = {}'\psi_A(x^\nu) - \psi_A(x^\nu) , \tag{3}$$

où

$${}'\psi_A(x^\nu) = G_A[\psi_A({}'x^\nu), {}'x^\nu, x^\nu] . \tag{4}$$

(Dans la formule (2) ε^i, $i = 1, 2, \ldots, \varrho$ représentent ϱ paramètres arbitraires). En vertu de cette définition on a

$$D\psi_A = \sum_{i=1}^{\varrho} \chi_{Ai}\varepsilon^i , \tag{5}$$

où les coefficients χ_{Ai} sont des fonctions de x^ν, de ψ_A et des dérivées de ψ_A par rapport à x^ν.

Considérons un comitant géométrique [3] à M composantes qui sont des fonctions de ψ_A et des dérivées de ψ_A par rapport à x^ν

$$\Lambda_B = \Lambda_B(\psi_A, \partial_\alpha\psi_A, \partial_\alpha\partial_\beta\psi_A, \ldots) , \tag{6}$$

où

$$\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha , \quad \partial_\alpha\partial_\beta = \partial^2/\partial x^\alpha\partial x^\beta , \ldots; \qquad B = 1, 2, \ldots, M.$$

La dérivée de Lie du comitant (6) peut être écrite sous la forme

$$D\Lambda_B = \sum_A \left(\frac{\partial \Lambda_B}{\partial \psi_A} D\psi_A + \frac{\partial \Lambda_B}{\partial (\partial_\alpha \psi_A)} \partial_\alpha D\psi_A + \frac{\partial \Lambda_B}{\partial (\partial_\alpha\partial_\beta \psi_A)} \partial_\alpha\partial_\beta D\psi_A + \ldots \right) . \tag{7}$$

(Nous utilisons la convention de sommation par rapport à un indice grecque deux fois repété). En introduisant les notations

$$\Lambda_B^A = \frac{\partial \Lambda_B}{\partial \psi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda_B}{\partial (\partial_\alpha \psi_A)} + \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial \Lambda_B}{\partial (\partial_\alpha\partial_\beta \psi_A)} - \ldots \tag{8}$$

les relations (7) deviennent

$$D\Lambda_B = \sum_A \Lambda_B^A D\psi_A + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\frac{\partial \Lambda_B}{\partial (\partial_\gamma\partial_\alpha \psi_A)} \partial_\alpha D\psi_A - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda_B}{\partial (\partial_\gamma\partial_\alpha \psi_A)} D\psi_A - \ldots \right] . \tag{9}$$

Quand le comitant (6) satisfait aux équations d'Euler-Lagrange $\Lambda_B^A = 0$ nous avons les égalités

$$D\Lambda_B = \sum_A \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\frac{\partial \Lambda_B}{\partial (\partial_\gamma\partial_\alpha \psi_A)} \partial_\alpha D\psi_A - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda_B}{\partial (\partial_\gamma\partial_\alpha \psi_A)} D\psi_A + \ldots \right] . \tag{10}$$

Le comitant (6) représente un objet géométrique et sa dérivée de Lie est donnée sous la forme

$$D\Lambda_B = \sum_{i=1}^{\varrho} J_{Bi}\varepsilon^i . \tag{11}$$

En tenant compte de (5) et de (10) et en introduisant les notations

$$T_{Bi}^\alpha = \sum_A \left(\frac{\partial \Lambda_B}{\partial (\partial_\alpha\partial_\beta \psi_A)} \partial_\beta \chi_{Ai} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial \Lambda_B}{\partial (\partial_\alpha\partial_\beta \psi_A)} \chi_{Ai} + \ldots \right) \tag{12}$$

nous avons $\varrho \cdot M$ lois de conservation généralisées

$$\partial_\alpha T_{Bi}^\alpha = J_{Bi} . \tag{13}$$

Dans le cas particulier, quand le comitant (6) représente un objet géométrique à une composante qui n'est pas une densité scalaire de poids $(+1)$, les relations (13) donnent des lois généralisées de conservations pour une intégrale non invariante.

Les lois de conservation généralisées deviennent des lois de conservation ordinaires, si les objets J_{Bi} peuvent être écrits sous la forme

$$J_{Bi} \equiv \partial_a \tau^a_{Bi} . \tag{14}$$

En introduisant les notations

$$M^a_{Bi} = T^a_{Bi} - \tau^a_{Bi} \tag{15}$$

nous avons $\varrho \cdot M$ lois de conservation ordinaires

$$\partial_a M^a_{Bi} = 0 . \tag{16}$$

Si le comitant (6) représente une densité scalaire de poids, $(+1)$ nous avons [2]

$$DA = \frac{\partial}{\partial x^a}(\Lambda D x^a) = \sum_{i=1}^{\varrho} \frac{\partial}{\partial x^a}(\theta^a_i)\varepsilon^i . \tag{17}$$

Les conditions (14) sont satisfaites et en vertu de (16) nous avons ϱ lois de conservation ordinaires

$$\partial_a(T^a_i - \Lambda\theta^a_i) = 0 \tag{18}$$

introduites par E. Noether [1].

L'auteur remercie M. A. Pawlikowski de ses précieuses remarques concernant cette note.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES, SÉCTION DE WROCŁAW
(INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN, ODDZIAŁ WE WROCŁAWIU)
INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW
(INSTYTUT FIZYKI TEORETYCZNEJ, UNIWERSYTET WROCŁAWSKI)

OUVRAGES CITÉS

[1] E. Noether, Nachr. Ges. Goetingen, (1918), 235.
[2] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*, Groningen, 1955.
[3] S. Gołąb, Ann. Soc. Pol. Math., **17** (1938), 177.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VII, No. 7, 1959

MATHEMATICS

On Bounded Univalent Functions

by

OLLI TAMMI (Helsinki)

Presented by K. KURATOWSKI on May 17, 1959

1. A generalization of the class of bounded univalent functions

Löwners well-known differential equation reads

$$\frac{dg}{du} = \frac{2e^{i\vartheta(u)}g^2}{1-ue^{i\vartheta(u)}g}\,. \tag{1}$$

Here $\vartheta(u)$ is supposed to be at least piecewise continuous on the interval $0 \leqslant x \leqslant u \leqslant 1$. The solution $g(u)$ satisfying the initial condition $g(1) = z$ always gives a function $f(z) = g(x)$ which is normalized:

$$f(z) = z + a_2(x)z^2 + \ldots \tag{2}$$

and univalent in the unit circle $|z| < 1$. Further, this function appears to be bounded:

$$|f(z)| \leqslant x^{-1} = R\,. \tag{3}$$

By varying the function $\vartheta(u)$ it is possible to approximate every univalent function by an arbitrary accuracy.

Löwner's equation is a natural tool for working with univalent functions bounded so that $w = f(z)$ always lies inside a circle K_R: $|w| \leqslant R = x^{-1}$. For the coefficient $a_2(x)$ we know the form of the extremal domain according to the results of Janowski, Joh, Spencer, Tammi [1]-[6].

The extremal domain appears to be a circle K_R having two diametral radial slits in the interval $1 < R < e$. In the inflexion point $R = e$, there holds one parametric family of extremal domains, defined by the conditions

$$\begin{cases} \cos\vartheta(u) = \dfrac{K}{u} \quad (0 \leqslant K \leqslant e^{-1};\ e^{-1} \leqslant u \leqslant 1)\,. \\ \displaystyle\int_{e^{-1}}^{1} \sin\vartheta(u)\,du = 0 \end{cases} \tag{4}$$

For $R > e$ the extremal domain is again unique, it is the circle K_R with a forked slit. The lack of uniqueness at this one point only is a curious phenomenon and naturally elicits the question, whether the concept of bounded functions can be modified so that the extremal domain should be unique in the whole class. The answer is affirmative, as we shall see.

We take a general starting point. Let L be a fixed schlicht domain. Consider all those normalized functions $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, which map the unit circle K_1: $|z| < 1$ onto a domain D, which lies inside the domain L. Let us, for the sake of brevity, say that D is normalized in the domain L. Denote the totality of such domains by $\{D\}_L$ and let the corresponding mapping functions form the class denoted by $\{f(z)\}_L = S_L$. We shall study some extremal properties of this class S_L.

We notice at once that L cannot be chosen quite arbitrarily. Schwarz's lemma shows immediately that the necessary and sufficient condition for L to contain some schlicht domains is that it contains such a normalized domain L_0, which is homotetic with L with respect to the origin. If $L = L_0$, this is the only domain in the class $\{D\}_L$.

In order to study the class $\{D\}_L$, we compare it with another class normalized in a concentric circle. This comparison-class is found as follows: Construct a function $w = L(w')$ satisfying the normalization $L(0) = 0$, $L'(0) = 1$, and mapping a circle $K_\varrho(0)$: $|w'| \leqslant \varrho$ of the w'-plane onto the given domain L. Because of the necessary and sufficient condition valid for L, we know that the radius $\varrho > 1$ is the non-trivial case. Let now D' be that domain on which the inverse function $w' = L^{-1}(w)$ maps the above domain D. Because both the functions $w' = L^{-1}(w)$ and $w = f(z)$ have normalized expansions, we see that the mapping function

$$w' = L^{-1}(f(z)) = g(z) \,.$$

which maps K_1 onto D', is normalized. Conversely, let D' be an arbitrary schlicht domain, normalized in the circle $K_\varrho(0)$, and having the mapping function $w' = g(z)$. In this case the function $w = L(w')$ maps the domain D' onto a schlicht domain D lying inside L. If the mapping function relating to D is $f(z)$, it is represented by

$$f(z) = L(g(z)) \,. \tag{5}$$

Thus, $f(z)$ is normalized and D belongs to the class $\{D\}_L$. Hence, we see that there is a one-to-one correspondence between the classes

$$\{D'\}_{K_\varrho};\ \{D\}_L \quad \text{and} \quad \{g(z)\}_{K_\varrho};\ \{f(z)\}_L \,,$$

respectively. The corresponding members of these classes are related to each other by the function $w = L(w')$.

There are many extremal properties of the class $\{g\}_{K_\varrho}$ which could be compared with those of the class $\{f\}_L$. We mention here only one general result.

2. Koebe's constant for the class $\{D\}_L$

In the class $\{D'\}_{K_\varrho}$, all the domains have a common circle K_r, the radius r of which is Koebe's constant in this class:

$$r = \frac{1}{2 - \varrho^{-1} + 2\sqrt{1-\varrho^{-1}}}.$$

Hence, in the class $\{D\}_L$ all the domains have a common domain

$$L(K_r).$$

The minimum radius of the boundary of this domain is thus the Koebe constant for the class $\{D\}_L$.

3. The special case $L = K_R(c)$

Let us specialize the bounding domain to a circle

$$K_R(c): |w-c| \leqslant R.$$

This is thus an eccentric circle of the w-plane. In this case, the function $L(w')$ reads

$$L(w') = \frac{w'}{1-kw'},$$

in which we have denoted

$$k = \frac{\bar{c}}{R^2 - |c|^2}.$$

According to the normalization, the radius ϱ of the circle $K_\varrho(0)$ will be

$$\varrho = \frac{R^2 - |c|^2}{R}.$$

The relation $f(z) = L(g(z))$ implies for the coefficients a_ν of $f(z)$

$$(6) \qquad \begin{cases} a_2 = a_2' + k \\ a_3 = a_3' + 2ka_2' + k^2, \end{cases}$$

where a_ν' are the coefficients of the function $g(z)$. Because the image domain D' is normalized in the concentric circle $K_\varrho(0)$, we can give to the coefficients a_ν', and hence also to the coefficients a_ν, the Löwner-expressions.

From the expression (6) of a_2, we see immediately that $|a_2|$ and $|a_2'|$ are maximalized at the same time, and that the extremal domains and functions in this case are combined with one another by Eq. (5). Hence,

the extremal domains in this case are circles $K_R(c)$ with one radial slit, directed to the origin.

As a result of considerations here omitted, we can show that the real part of the Löwner-expression of a_3 is always bounded by the expression

$$(7) \qquad 4\Big(\int_{\varrho^{-1}}^{1} \cos\vartheta(u)\,du\Big)^2 - 2\int_{\varrho^{-1}}^{1} u\cos 2\vartheta(u)\,du + 4|k|\int_{\varrho^{-1}}^{1} \cos\vartheta(u)\,du + |k|^2 .$$

The task of maximalizing this quantity is purely a matter of calculation [5]. Let us now consider the nature of our result.

In order to express this result in a suitable form, let us denote the eccentricity of the circle $K_R(c)$ by

$$\varkappa = \frac{|c|}{R} \leqslant \sqrt{1-R^{-1}}$$

and adopt the variable

$$x = \varrho^{-1} = \frac{R^{-1}}{1-\varkappa^2} .$$

In these quantities we get the following upper bounds:

$$|a_3| \leqslant 1 - x^2 + \varkappa^2 \frac{x^2}{1+\log x},$$

which is valid when

$$\frac{1}{1-\varkappa^2} \leqslant R \leqslant \frac{e^{1-\frac{\varkappa}{2}}}{1-\varkappa^2} = R_0$$

and further

$$|a_3| \leqslant 1 - x^2 + 2(\sigma - x)^2 + 2\varkappa\delta x , \qquad \text{when} \qquad R_0 \leqslant R \leqslant \infty .$$

Here σ is the single root of the equation

$$\sigma\log\sigma + \Big(1 - \frac{\varkappa}{2}\Big)x = 0 .$$

The question of the form of the extremal domain is of especial interest to us. It may be seen immediately that, in this case, the extremal domains of the sets $\{D'\}_{R_0}$ and $\{D\}_L$ do not correspond to one another. From moderately long considerations we get the following series of extremal domains, arranged with increasing values of R: If $R < R_0$ the extremal domain is a circle $K_R(c)$ having two curved slits. These converge towards each other with increasing values of R and form a fork, if $R = R_0$. If $R > R_0$ the extremal domain has the same form as in the case No. 1 mentioned above.

The fact is especially noticeable that the value R_0 is not exceptional with respect to the unique nature of the extremal domain. As is known,

this is not valid for the case $c = \varkappa = 0$, studied previously. Thus, we see that the way of bounding schlicht domains D by using an eccentric circle $K_R(c)$ seems to be more convenient than that which uses the concentric circle $K_R(0)$.

REFERENCES

[1] W. Janowski, *Le maximum des coefficients A_2 et A_3 des fonctions univalentes bornées*. Ann. Polonici Math. **2** (1955).

[2] K. Joh, *Theorems on schlicht functions II*. Proc. Phys. Math. Soc. of Japan Ser. **3**, **20** (1938).

[3] D. Spencer, *The coefficients of schlicht functions*. Duke Math. Journ. **12** (1945).

[4] O. Tammi, *On the maximalization of the coefficients of schlicht and related functions*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. (1952), No. 114.

[5] — *On the maximalization of the coefficient a_3 of bounded schlicht functions*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. (1953), No. 149.

[6] — *On the extremal domains belonging to the coefficient a_3 of bounded schlicht functions*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. (1953), No. 162.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VII, No. 7, 1959

MATHEMATICS

Existence Theorem for the First Boundary Problem for a Quasilinear Elliptic System

by

P. SZEPTYCKI

Presented by K. BORSUK on May 21, 1959

1. Schauder's "a priori" estimates for solutions of elliptic equations of the second order have been successfully applied many times to the existence theory of quasilinear second order elliptic equations (cf. [1] and [5]). Results of this kind achieved in the theory of quasilinear elliptic systems are more fragmentary. In order to demonstrate the possibility of such an approach, we shall present in this paper an existence theorem for a rather special quasilinear elliptic system of the second order. For the sake of simplicity, we restrict ourselves in the formulation of this theorem to a stronger assumption concerning coefficients of the system considered, than those required by Cordes [1], even though the theorem still remains true under those more general assumptions.

2. We shall use the following notations. Ω is a bounded domain of N-dimensional Euclidean space, the boundary $\partial\Omega$ of Ω is supposed to be of class $C_{2+\gamma}$ for some positive $\gamma < 1$ (i. e. $\partial\Omega$ may be divided into a finite set of closed sections, each of which may be represented in a suitable system of co-ordinates by the equation $y_N = \varrho(y_1, \ldots, y_{N-1})$, ϱ possessing second order derivatives satisfying the Hölder condition (γ)). Following Nirenberg, for any function f continuous with its derivatives up to order m on Ω and with m-th derivatives Hölder continuous (α), $0 < \alpha < 1$, we define

$$|f|_{m+\alpha} = \sum_{0 \leqslant |\beta| \leqslant m} \sup_{\Omega} |D^\beta f(x)| + H_{\alpha,\delta}(D^m f, \Omega), \tag{1}$$

where

$$H_{\alpha,\delta}(D^m f, \Omega) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{|x-y| \leqslant \delta \\ x,y \in \Omega}} \frac{\left[\sum_{|\beta|=m} (D^\beta f(x) - D^\beta f(y))^2\right]^{1/2}}{|x-y|^\alpha} \tag{2}$$

and

$$D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}}, \quad |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_N, \quad \beta_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

The space of all functions f defined on Ω, for which the norm (1) is finite, is denoted by $C_{m+\alpha}(\Omega)$ and the space of all vector functions $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_l \in C_{m+\alpha}(\Omega)$, $l = 1, \dots, n$, with the norm defined by $(f)_{m+\alpha} = \sum_{l=1}^{n} |f_l|_{m+\alpha}$ is denoted by $C^n_{m+\alpha}(\Omega)$. All those spaces are Banach spaces.

3. We shall consider the following quasilinear system

$$[L(x, u, \operatorname{grad} u, D)u]_l = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x, u, \operatorname{grad} u) \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i(x, u, \operatorname{grad} u) \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \sum_{l_1=1}^{n} c_{u_l}(x, u, \operatorname{grad} u) u_{l_1}$$

$$l = 1, \dots, n \qquad u = (u_1(x), \dots, u_n(x)), \qquad \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x_N}\right).$$

Concerning coefficients we assume that

1° a_{ij}, a_i, c_{u_l} are bounded and satisfying the Hölder condition with some exponent $0 < \gamma_1 < 1$, for all values of u, $\operatorname{grad} u$ and $x \in \Omega$.

2° The matrix c_{u_l} is negative definite, i. e. $\sum_{l,l_1=1}^{n} c_{u_l} \eta_l \eta_{l_1} < 0$ for all real $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \neq 0$;

3° (Modified ellipticity condition). There are two such constants $0 < m < M$, that, for all real $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $m|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \xi_i \xi_j \leqslant M|\xi|^2$, where $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2$. Moreover, m and M are connected by the condition

$$0 < \tau_1 \leqslant \frac{M}{m} \leqslant \tau_2,$$

where, for some fixed $0 < \varepsilon < 1$, τ_1, τ_2 are roots of the equation

$$[a - (1-\varepsilon)]\tau^2 - 2[a + (1-\varepsilon)(N-1)]\tau + a - (1-\varepsilon)(N-1)^2 = 0,$$

where

$$a = (N-1)\left(1 + \frac{N-2}{(N-1)(N+1)}\right)\left(N - E\left(\frac{N}{2}\right)\right)E\left(\frac{N}{2}\right).$$

Note that the above mentioned condition 3° is a particular case contained in the K'_ε-condition required by Cordes [1].

The boundary problem to be considered in this paper consists in finding a solution of the equation

$$[Lu(x)]_l = 0 \quad \text{for} \quad x \in \Omega \tag{3}$$

with the boundary condition

$$u_l(x) = \varphi_l(x) \quad \text{for} \quad x \in \partial\Omega\,, \quad l = 1, \ldots, n\,. \tag{4}$$

where φ is a given function defined on $\partial\Omega$.

More precisely, the main result of this paper is contained in the following.

THEOREM 1. *Suppose conditions* $1^0, 2^0, 3^0$ *to be satisfied and* $\varphi \in C^n_{2+\gamma_2}(\partial\Omega)$. *Then there is at least one* u *satisfying* (3) *and* (4) *and belonging to* $C^n_{2+\gamma_2}(\Omega)$ *with some positive* γ_2.

We will give only a general outline of the proof, all details being a literal repetition of those contained in [1], [2], and [3].

First of all we will prove the following

LEMMA 1. (Generalization of the principle of maximum). Suppose $u \in C^n_2(\Omega)$ is a solution of the system of equations

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \sum_{l_1=1}^{n} c_{ll_1}(x)u_{l_1} = 0\,, \quad l = 1, \ldots, n \tag{5}$$

where

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant c|\xi|^2\,,\ c > 0\,, \quad \text{and} \quad \sum_{l,l_1=1}^{n} c_{ll_1}\eta_l\eta_{l_1} < 0\,, \quad \text{for all real} \tag{6}$$

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)\,, \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0\,.$$

Then

$$\sum_{l=1}^{n} [u_l(x)]^2 \overline{\det}\, R(x) \leqslant \max_{y \in \partial\Omega} R(y) \quad \text{for} \quad x \in \Omega\,.$$

Suppose, on the contrary, that there is a point x_0 in which R reaches its maximal value. We should have at x_0

$$\frac{\partial R(x_0)}{\partial x_i} = 2\sum_{l=1}^{n} u_l(x_0)\frac{\partial u_l(x_0)}{\partial x_i} = 0 \tag{7}$$

and

$$0 \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\zeta_i\zeta_j\frac{\partial^2 R(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{N}\zeta_i\zeta_j\left[\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u_l(x_0)}{\partial x_i}\frac{\partial u_l(x_0)}{\partial x_j}\right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{n} u_l(x_0)\frac{\partial^2 u_l(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}\right] \quad \text{for all real} \quad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)\,. \tag{8}$$

However, we deduce from (6)

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{N} b_{ij}\xi_j\Big)^2 \quad \text{for all } \xi,$$

where b_{ij} are some real numbers. Substituting in (8) $\zeta_i = b_{ik}$ and summing over k we get on the basis of (5), (6), (7)

$$0 \geqslant \sum_{l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\frac{\partial u_l(x_0)}{\partial x_i}\frac{\partial u_l(x_0)}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n} u_l(x_0)\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u_l(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\frac{\partial u_l(x_0)}{\partial x_i}\frac{\partial u_l(x_0)}{\partial x_j} - \sum_{l,l_1=1}^{n} c_{u_1} u_l(x_0) u_{l_1}(x_0) > 0\,.$$

This contradiction proves the lemma (see Note on p. 424).

Suppose now the coefficients of the system (5) to be of $C_\alpha(\Omega)$ for some positive $0 < \alpha < 1$ and the boundary values φ of u to be of $C^n_{2+\alpha}(\partial\Omega)$. Repeating for this system the reasoning contained in [2], chapter V or that of [3] we obtain for the system considered the following.

THEOREM 2. (Schauder estimate near the boundary). *There is such a constant $K > 0$ depending on norms in $C_\alpha(\Omega)$ of a_{ij}, a_i, c_{u_1} and bounded, for $1/A$ bounded $(A = \det(a_{ij}))$ that, for any solution U of* (5), (4) *with Hölder continuous* (α) *second derivatives and boundary values $\varphi \in C^n_{2+\alpha}(\partial\Omega)$,*

$$|U|_{2+\alpha} \leqslant K[|U|_0 + |\varphi|_{2+\alpha}]\,. \tag{9}$$

Applying Lemma 1 to (9) we get the following.

COROLLARY. *There is such a constant K_1 depending on the same quantities as K that, for any U satisfying the conditions of Theorem 2, we have*

$$|U|_{2+\alpha} \leqslant K_1|\varphi|_{2+\alpha}\,. \tag{10}$$

The estimate (10) makes it possible to obtain the following existence theorem for the linear system (5), (4).

THEOREM 3. *For any $\varphi \in C^n_{2+\alpha}(\partial\Omega)$ there is a unique $U \in C^n_{2+\alpha}(\Omega)$ satisfying* (5), (4).

The proof is a literal repetition of that for one equation contained in [2], par. 36. We take, namely, the following system as that which is to be prolonged:

$$(\Delta - 1)U_l = 0\,, \quad U_l|_{\partial\Omega} = \varphi_l\,, \quad l = 1, \ldots, n\,.$$

Consider now for any $u \in C^n_{1+\gamma_3}(\Omega)$ for a fixed $0 < \gamma_3 < 1$ the linear system of equations

$$L(u, u, \operatorname{grad} u, D)U = 0 \qquad U|_{\partial\Omega} = \varphi\,, \tag{11}$$

L satisfying 1^0, 2^0, 3^0, with $\gamma_2 = \gamma\gamma_3$, γ-being the Hölder exponent of the coefficients of L. $a_{ij}(x, u, \operatorname{grad} u)$, $a_i(x, u, \operatorname{grad} u)$, and $c_{ll_1}(x, u, \operatorname{grad} u)$ considered as functions of x belong to $C_{\gamma_1}(\Omega)$. We may, therefore, apply the estimate (10)

$$|U|_{2+\gamma_2} \leqslant K(|u|_{1+\gamma_3})|\varphi|_{2+\gamma_2}\,. \tag{12}$$

Moreover, on the basis of Theorem 3, (11) defines a transformation $T\colon C^n_{1+\gamma_3}(\Omega) \to C^n_{2+\gamma_2}(\Omega)$ there being for any $u \in C^n_{1+\gamma_3}$ a unique $U \in C^n_{2+\gamma_2}(\Omega)$ which satisfies (11)). We put $Tu \underset{\text{def}}{=} U$. It follows from (12) and Lemma 1′ that, on any sphere $\{u\colon |u|_{1+\gamma_3} \leqslant c\}$, the transformation T is completely continuous, the set $\{U\colon |U|_{2+\gamma_2} \leqslant K(c)|u|_{2+\gamma_2}\}$ being compact in $C^n_{1+\gamma_3}(\Omega)$.

We are now going to prove that, for a suitable $0 < \gamma_3 < 1$, there is such a constant c_1, that T maps the sphere $|u|_{1+\gamma_3} \leqslant c_1$ into itself. This fact being proved, we may apply to T the Schauder fixed-point theorem and assert that there is such an $u_0 \in C^n_{1+\gamma_3}(\Omega)$, belonging moreover to $C^n_{2+\gamma_2}(\Omega)$, that $Tu_0 = u_0$. This is just a solution of (3), (4).

In order to prove the existence of the above mentioned constant c_1 it is sufficient to get an "a priori" estimate for the solution of (5), (4), of the form

$$|U|_{1+\gamma_3} \leqslant c_2|\varphi|_2\,,$$

where c_2 must not depend on Hölder constants of coefficients of L but only on their bounds. This estimate for a single equation was obtained by Cordes [1] whose idea may be applied without any changes to the system here considered.

It is based on the following three lemmas.

LEMMA 2. *Let there exist for some function u continuous on Ω such constants*

$$0 < \alpha < 1\,,\ d > 0 \quad \text{that, for} \quad \delta < d\,,$$

$$\int\limits_{|x-x_0|\leqslant\delta} \frac{(u(x)-u(x_0))^2}{|x-x_0|^{N+2\alpha}}\,dx \leqslant q(\delta) \tag{13}$$

holds uniformly for all $x_0 \in \Omega$. Then u satisfien on Ω the Hölder condition (α) with the constant

$$H_{\alpha,\delta}(u, \Omega) \leqslant 2^{\frac{N}{2}+1}\sqrt{N q(\delta)\,\omega_{N-1}^{-1}}$$

(ω_{N-1}-denotes the surface of the sphere $|x| = 1$, $x \in E_N$).

LEMMA 3. *The assumptions of Lemma 2 being satisfield and*

$$\int\limits_{|x-x_0|\leqslant\delta} \frac{u(x)-u(x_0)-\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i-x_i^0)\dfrac{\partial u(x_0)}{\partial x_i}}{|x-x_0|^{N+2+2\alpha}}\,dx \leqslant q_1(\delta) \tag{14}$$

u possesses first dirivatives satisfying the (α) Hölder condition and

$$H_{\alpha,\delta}(Du, \Omega) \leqslant 2^{\frac{N}{2}+2}\sqrt{N(N+2)\,q_1(\delta)\,\omega_{N-1}^{-1}}\,.$$

The next step consists of estimating the integrals (13), (14) taken as solution U of (5), (4), by means of the norms $|U|_0$ and $|\varphi|_2$. By some rather intricate calculus following literally that contained in [1] one obtains (the fact that the system L is separated and satisfies the modified ellipticity condition is essential here) the following lemma.

LEMMA 4. *There is such an* α, $0 < \alpha < 1$ *depending only on* ε (*cf. condition* 3^0) *and such constants* K_1, K_2 *depending only on* Ω *and bounds of coefficients of* L, *that*

$$|U|_{1+\alpha} \leqslant K_1|U|_0 + K_2|\varphi|_2 , \tag{15}$$

Applying Lemma 1 to (15) we get

$$|U|_{1+\alpha} \leqslant K_3|\varphi|_2 , \tag{16}$$

where K_3 depends only on the quantities mentioned in Lemma 4.

If we put $\gamma_3 = \alpha$, then (16) is the desired estimate and Theorem 1 is completely proved.

The author does not know whether or not some of the above results may be generalized to non-separated systems. Even the problem of generalization of Lemma 1 seems to be interesting.

Note: in a similar way the following Lemma 1′ may be proved:

LEMMA 1′. *If* $u_l \in C_2^n(\Omega)$ *satisfies* $(Lu)_l = f_l$, *where* $(Lu)_l$ *denotes the left hand side of* (5), $f_l \in C_0^n(\Omega)$ *and* $u_l|_{\partial\Omega_N} = 0$, *then* $R_z = \sum_{l=1}^{n} u_l^2$ *satisfies the estimate* $R(x) \leqslant \frac{1}{C_1}|f|_0$, *where* $c_1 = \min_{|\xi|=1} C_{l_1 l_2 l_3 l_4}\xi_{l_1}\xi_{l_2}\xi_{l_3}\xi_{l_4}$.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN)

REFERENCES

[1] H. O. Cordes, *Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen*; Mathematische Annalen **131** (1956), 278-312.

[2] C. Miranda, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Berlin, (1955).

[3] A. Douglis and L. Nirenberg, *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations*, Comm. on Pure and Appl. Math. **8** (1955), 503-538.

[4] A. V. Bicadze, *On elliptic systems of second order partial differential equations* (in Russian) Dok. Akad. Nauk SSSR **112** (1957), 6. 983-986.

[5] C. C. Dymkov, *„First boundary value problem for quasilinear elliptic equations* (in Russian) Dok. Akad. Nauk. SSSR **115** (1957), 2, 220-222.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VII, No. 7, 1959

MATHEMATIK

Über die Konvergenz der Folgen von verallgemeinerten zufälligen Grössen in Orlicz'schen Raümen

von

A. T. BHARUCHA-REID

Vorgelegt von W. ORLICZ am 25 Mai 1959

In diesem Aufsatz formulieren wir drei Sätze, die die schwache und starke Konvergenz der Folgen von verallgemeinerten zufälligen Grössen mit Werten in separablen Orlicz'schen Räumen betreffen. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsfeld, T eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge eines endlich dimensionalen Euklidischen Raumes und $L_\Phi(T)$ ein Orlicz'scher Raum. Eine Abbildung $x(t, \omega)$ des messbaren Raumes $(\Omega, \mathcal{A}) \times T$ in den messbaren Raum $(L_\Phi, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von L_Φ ist, heisst *verallgemeinerte zufällige Grösse mit Werten im Orlicz'schen Raum*, wenn für jedes feste $t \in T$

$$\{\{\omega\colon x(t, \omega) \in B\} : B \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{A}.$$

Für eine genaue Definition von Orlicz'schen Räumen und ihren Eigenschaften verweisen wir auf [5] und [8] und für die Besprechung von verallgemeinerten zufälligen Grössen in Orlicz'schen Räumen auf [1].

Es sei $x^*, x_1, x_2, \ldots$ eine Folge von verallgemeinerten zufälligen Grössen mit Werten im Orlicz'schen Raum L_Φ. Wir nehmen für allemal an, dass L_Φ separabel ist; deshalb ist das Wahrscheinlichkeitsmass μ auch separabel und die konvexe Funktion

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} \varphi(s)\,ds,$$

wobei $\varphi(s)$ eine nicht fallende Funktion mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$ ist, erfüllt die Δ_2-Bedingung, d. h. es gibt eine positive Konstante M und eine nicht negative Konstante u_0, so dass $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ für alle $u \geqslant u_0$.

Nun geben wir drei Sätze an, die die notwendigen und hinreichenden Bedingungen liefern, damit eine Folge von verallgemeinerten zufälligen Grössen $\{x(t, \omega)\}_{n=1}^{\infty} \in L_\Phi$ schwach sequential fast sicher, schwach fast sicher und stark fast sicher, gegen eine verallgemeinerte zufällige Grösse $x^*(t, \omega) \in L_\Phi$ konvergieren.

Satz 1. *Die Folge* $\{x_n(t, \omega)\} \in L_\Phi$ *von verallgemeinerten zufälligen Grössen konvergiert schwach sequential fast sicher gegen die verallgemeinerte zufällige Grösse* $x^*(t, \omega) \in L_\Phi$ *dann und nur dann, wenn die folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *für jedes* $n = 1, 2, \ldots$

$$\mu\left\{\omega\text{: die Mengenfunktionen } \int_T \Phi(|x_n(t, \omega)|)\,dt \text{ sind gleichmässig absolut stetig}\right\} = 1,$$

und

(ii) *für jedes* $i = 1, 2, \ldots$

$$\mu\left\{\omega\text{: } \lim_{n\to\infty} \int_T \left(x_n(t, \omega) - x^*(t, \omega)\right) t^i\,dt = 0\right\} = 1.$$

Satz 2. *Die Folge* $\{x_n(t, \omega)\} \in L_\Phi$ *von verallgemeinerten zufälligen Grössen konvergiert schwach fast sicher gegen die verallgemeinerte zufällige Grösse* $x^*(t, \omega) \in L_\Phi$ *dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *es gibt eine gewöhnliche zufällige Grösse* $\xi(\omega)$, *so dass für jedes* $n = 1, 2, \ldots$

$$\mu\left\{\omega\text{: } \int_T \Phi\left(x(t, \omega)\right) dt \leqslant \xi(\omega)\right\} = 1,$$

und

(ii) *für jedes* $i = 1, 2, \ldots,$

$$\mu\left\{\omega\text{: } \lim_{n\to\infty} \int_T \left(x_n(t, \omega)\right) - x^*(t, \omega) t^i\,dt = 0\right\} = 1.$$

Satz 3. *Die Folge* $\{x_n(t, \omega)\} \in L_\Phi$ *von verallgemeinerten zufälligen Grössen konvergiert stark fast sicher gegen die verallgemeinerte zufällige Grösse* $x^*(t, \omega)$ *dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *es gibt eine gewöhnliche zufällige Grösse* $\xi(\omega)$, *so dass für jedes* $n = 1, 2, \ldots$

$$\mu\left\{\omega\text{: } \int_T \Phi\left(x(t, \omega)\right) dt \leqslant \xi(\omega)\right\} = 1,$$

(ii) *für jedes* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$, *so dass für jedes* $r < \delta$ *und für jedes* $n = 1, 2, \ldots$

$$\mu\left\{\omega\text{: } \int_T \Phi\left(|x_n(t, \omega) - [x_n(t, \omega)]_r|\right) dt \leqslant \varepsilon\right\} = 1,$$

und

(iii) *für jedes* $i = 1, 2, \ldots$

$$\mu\left\{\omega\text{: } \lim_{n\to\infty} \int_T \left(x_n(t, \omega) - x^*(t, \omega)\right) t^i\,dt = 0\right\} = 1.$$

In der Bedingung (ii), die Funktionen $y_r(t)$ bedeuten die Stekloff'schen Funktionen

$$y_r(t) = \frac{1}{V(r)} \int_{S(r,t)} g(\tau) d\tau ,$$

wo

$$g(t) = \begin{cases} y(t) & \text{für } t \in T , \\ 0 & \text{für } t \notin T , \end{cases}$$

und wo $S(r, t)$ eine n-dimensionale Sphäre mit der Mitte in t, dem Radius r bedeutet, und $V(r)$ sein Volumen ist.

Bemerkungen (1). Die Beweise der obigen Sätze benutzen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für schwache, sequential schwache und starke Kompaktheit in Orlicz'schen Räumen (vgl. [5], [6], [7]).

(2). In bezug auf den Satz 1: E kann bedeuten die Teilmenge von L_Φ, die Folge $\{x_n(t, \omega)\}$ enthält, die gegen $x^*(t, \omega)$ konvergiert. Es ist bekannt (vgl. [2], [3]), dass, wenn E eine beschränkte schwach abgeschlossene Teilmenge von einem Banachschen Raum X (hier $X = L_\Phi$) ist, dann ist die schwache sequential Kompaktheit von E gleich der schwachen Kompaktheit von E. Daher, wenn E die obige Bedingung erfüllt, so ist die schwache sequential fast sichere Konvergenz von $\{x_n(t, \omega)\}$ gegen $x^*(t, \omega)$ der schwachen fast sicheren Konvergenz gleich.

(3). Die drei Sätze, die in diesem Ausfatz gegeben wurden, können als besondere Fälle vom dem fast sicheren Konvergenzsatz von O. Hanš ([4], Satz 13) betrachtet werden. Jedoch, wegen der Beziehung zwischen den Orlicz'schen und Lebesgue'schen Räumen, die Sätze 2 und 3 in diesem Aufsatz verallgemeinern die Sätze 33 und 34 von Hanš.

MATHEMATISCHES INSTITUT (ABTEILUNG WROCŁAW), POLNISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
(INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN, WROCŁAW)
UNIVERSITÄT VON OREGON, EUGENE, OREGON, USA

SCHRIFTTUM

[1] A. T. Bharucha-Reid, *On random elements in Orlicz spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **4** (1956), 655-657.

[2] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Berlin, 1958.

[3] W. A. Eberlein, *Weak compactness in Banach spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **33** (1947), 51-53.

[4] O. Hanš, *Generalized random variables*, Trans. First Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, 1956 (1957), 61-103.

[5] M. A. Krasnoselskiĭ und Ya. B. Rutitskiĭ, *Konvexe Funktionen und Orlicz'sche Räume* (Russisch), Moskau, 1958,

[6] T. Takahashi, *On the compactness of the function-set by the convergence in mean of general type*, Studia Math. **5** (1934), 141-150.

[7] A. C. Zaanen, *Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces*, Compositio Math. **10** (1952), 56-94.

[8] — *Linear analysis*, New York, 1953.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VII, No. 7, 1959

ASTROPHYSICS

The Magnetogravitational Instability of an Infinite Homogeneous Medium When a Coriolis Force is Acting and Viscosity is Taken into Account

by

A. G. PACHOLCZYK and J. S. STODÓŁKIEWICZ

Presented by W. IWANOWSKA on May 19, 1959

It is shown, that the critical wavelength of the pertubation in the formula for the magnetogravitational instability of the infinite, homogeneous medium, when a Coriolis force is acting and viscosity is taken into account, is not greater, than in the case of non viscous medium.

Introduction

More than fifty yers ago, Jeans [4], [5] showed that if the perturbation imposed on the homogeneous, infinite ideal medium with the density ϱ, has a Fourier component with the wavelength exceeding the limiting value given by the expression

$$\lambda_* = \pi \sqrt{\frac{V_s^2}{\pi G \varrho}}, \tag{1}$$

where V_s is the velocity of sound and G the gravitational constant, the medium considered will be unstable — it will break up into condensations having linear dimensions of the order of $^1/_2\lambda_*$.

Jeans' criterion (1) remains unaffected both when Coriolis force is acting [2] and when a magnetic field is present [3]. There are two exceptions from this rule: first, if the angular velocity of rotation Ω is perpendicular to the direction of propagation of the perturbation (Spitzer, see [2]) then condition (1) takes the form

$$\lambda_* = \pi \sqrt{\frac{V_s^2}{\pi G \varrho - \Omega^2}}; \tag{2}$$

secondly, if there is no component of the magnetic field in the direction of propagation of the perturbation; in this case the condition (1) is modified to the form

$$\lambda_* = \pi \sqrt{\frac{V_s^2 + V_a^2}{\pi G \varrho}}, \tag{3}$$

where V_a is the velocity of the Alfvén wave [6], [7]. In a recent paper Chandrasekhar [1] has shown, that Jeans' criterion (1) remains valid (with the second exception) also when Coriolis force and the magnetic field are both simultaneously acting.

In the present paper the influence of the viscosity effects on the condition for magnetogravitational instability of the infinite, homogeneous medium is considered in the case when the Coriolis force is acting.

Basic equations

The equations governing the fluctuations in density ($\delta\varrho$), pressure (δp), magnetic field ($\bar{h}$) and gravitational potential ($\delta\psi$), in the infinite, homogeneous medium of infinite electrical conductivity are

$$\varrho \dot{\bar{u}} = -\frac{1}{4\pi} \bar{H} \times \operatorname{curl} \bar{h} + 2\varrho \bar{u} \times \bar{\Omega} - \operatorname{grad} \delta p + \varrho \operatorname{grad} \delta\psi + \eta \Delta \bar{u} + \frac{1}{3} \eta \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u}, \tag{4}$$

$$\dot{\bar{h}} = \operatorname{curl}(\bar{u} \times \bar{H}), \tag{5}$$

$$\delta\dot{\varrho} = -\varrho \operatorname{div} \bar{u}, \tag{6}$$

$$\Delta \delta\psi = -4\pi G \delta\varrho, \tag{7}$$

$$\operatorname{div} \bar{h} = 0, \tag{8}$$

the case of the viscous medium in the constant magnetic field $\bar{H}$ under the action of Coriolis force $2\varrho\bar{u} \times \Omega$ (Ω = constant) is considered. η denotes the coefficient of the viscosity, Δ is the Laplace operator, and other notations are usual.

We assume, that the changes of pressure and density take place adiabatically

$$\delta p = V_s^2 \delta\varrho, \tag{9}$$

where the velocity of sound is given by

$$V_s^2 = \gamma p \varrho^{-1}, \tag{10}$$

(γ is the ratio of the specific heats), and we suppose, that the orientation of the co-ordinate axes is so chosen, that

$$\bar{H} = [0, H_2, H_3]. \tag{11}$$

If we seek solutions of Eqs. (4)-(8) depending only on the z-co-ordinate, we obtain from the divergence condition (8) that

$$h_3 = 0 \,. \tag{12}$$

Hence, if we denote

$$\nu = \eta \varrho^{-1} \,, \tag{13}$$

we obtain from Eqs. (4)-(8) and (12) the following system

$$\dot{u}_1 - H_3(4\pi\varrho)^{-1}h_{1,3} - 2u_2\Omega_3 + 2u_3\Omega_2 - \nu u_{1,33} = 0 \,, \tag{14}$$

$$\dot{u}_2 - H_3(4\pi\varrho)^{-1}h_{2,3} + 2u_1\Omega_3 - 2u_3\Omega_1 - \nu u_{2,33} = 0 \,, \tag{15}$$

$$\dot{u}_3 + H_2(4\pi\varrho)^{-1}h_{2,3} - 2u_1\Omega_2 + 2u_2\Omega_1 + V_s^2\varrho^{-1}\delta\varrho_{,3} - \delta\psi_{,3} - \tfrac{4}{3}\nu u_{3,33} = 0 \,, \tag{16}$$

$$\dot{h}_1 - H_3 u_{1,3} = 0 \,, \tag{17}$$

$$\dot{h}_2 + H_2 u_{3,3} - H_3 u_{2,3} = 0 \,, \tag{18}$$

$$\delta\dot{\varrho} + \varrho u_{3,3} = 0 \,, \tag{19}$$

$$\delta\psi_{,33} + 4\pi G\delta\varrho = 0 \,, \tag{20}$$

where the indices 1, 2, 3 denote the components in the rectangular co-ordinates x, y, z, respectively, and indices to the right of the coma denote the corresponding derivatives.

We shall consider wave solutions of Eqs. (14)-(20). Thus, if σ denotes the frequency, and k the wave number (the time- and spatial dependence of all variables is given by the factor $\exp i(\sigma t + kz)$), the system (14)-(20) can be easily reduced to the following system of algebraic equations for amplitudes, denoted by asterisks

$$i\sigma u_1^* - H_3(4\pi\varrho)^{-1}ikh_1^* - 2u_2^*\Omega_3 + 2u_3^*\Omega_2 + \nu k^2 u_1^* = 0 \,, \tag{21}$$

$$i\sigma u_2^* - H_3(4\pi\varrho)^{-1}ikh_2^* + 2u_1^*\Omega_3 - 2u_3^*\Omega_1 + \nu k^2 u_2^* = 0 \,, \tag{22}$$

$$i\sigma u_3^* + H_2(4\pi\varrho)^{-1}ikh_2^* - 2u_1^*\Omega_2 + 2u_2^*\Omega_1 + V_s^2\varrho^{-1}ik\delta\varrho^* - ik\delta\psi^* + \tfrac{4}{3}\nu k^2 u_3^* = 0 \,, \tag{23}$$

$$\sigma h_1^* - H_3 k u_1^* = 0 \,, \tag{24}$$

$$\sigma h_2^* + H_2 k u_3^* - H_3 k u_2^* = 0 \,, \tag{25}$$

$$\sigma\delta\varrho^* + \varrho k u_3^* = 0 \,, \tag{26}$$

$$k^2\delta\psi^* - 4\pi G\delta\varrho^* = 0 \,. \tag{27}$$

Substituting h_1^*, h_2^* from (24) and (25) as well as $\delta\varrho^*$ from (26) and $\delta\psi^*$ from (27) into (21), (22) and (23) and introducing the following symbols (cf. [1])

$$\Omega_J = (V_s^2 k^2 - 4\pi G\varrho)^{1/2} \,, \tag{28}$$

$$\Omega_A = kH_3(4\pi\varrho)^{-1/2} \,, \tag{29}$$

$$\Omega_B = kH_2(4\pi\varrho)^{-1/2} \,, \tag{30}$$

$$\Omega_L = k^2\nu \,, \tag{31}$$

we obtain equations

$$(32)\quad -\sigma u_1^* + \Omega_A^2 \sigma^{-1} u_1^* - 2iu_2^*\Omega_3 + 2iu_3^*\Omega_2 + i\Omega_L u_1^* = 0\,,$$

$$(33)\quad -\sigma u_2^* + \Omega_A^2 \sigma^{-1} u_2^* - \Omega_A\Omega_B\sigma^{-1}u_3^* + 2iu_1^*\Omega_3 - 2iu_3^*\Omega_1 + i\Omega_L u_2^* = 0\,,$$

$$(34)\quad -\sigma u_3^* + \Omega_B^2\sigma^{-1}u_3^* - \Omega_A\Omega_B\sigma^{-1}u_2^* - 2iu_1^*\Omega_2 + 2iu_2^*\Omega_1 + i\tfrac{4}{3}\Omega_L u_3^* + \sigma^{-1}\Omega_J^2 u_3^* = 0\,.$$

Dispersion equation and condition of instability

The system of Eqs. (32)-(34) has nontrivial solutions, if the following dispersion equation is satisfied

(35)

$$\begin{vmatrix} -\sigma + \sigma^{-1}\Omega_A^2 + i\Omega_L, & -2i\Omega_3 & , 2i\Omega_2 \\ 2i\Omega_3 & , -\sigma + \sigma^{-1}\Omega_A^2 + i\Omega_L, & -2i\Omega_1 - \sigma^{-1}\Omega_A\Omega_B \\ -2i\Omega_2 & , 2i\Omega_1 - \sigma^{-1}\Omega_A\Omega_B & , -\sigma + \sigma^{-1}\Omega_B^2 + i\tfrac{4}{3}\Omega_L + \sigma^{-1}\Omega_J^2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Eq. (35) is an equation for σ; it gives the instability condition. We shall discuss the Eq. (35) in a particular case, in which

$$(36)\qquad \Omega_2 = \Omega_3 = 0\,, \qquad |\bar{\Omega}| = \Omega_1 = \Omega\,,$$

this case is particularly interesting from the point of view of the stability of galactic systems. Then Eq. (35) reduces to the form

(37)

$$\begin{vmatrix} -\sigma + \sigma^{-1}\Omega_A^2 + i\Omega_L, & 0 & , 0 \\ 0 & , -\sigma + \sigma^{-1}\Omega_A^2 + i\Omega_L, & -2i\Omega_1 - \sigma^{-1}\Omega_A\Omega_B \\ 0 & , 2i\Omega_1 - \sigma^{-1}\Omega_A\Omega_B & , -\sigma + \sigma^{-1}\Omega_B^2 + i\tfrac{4}{3}\Omega_L + \sigma^{-1}\Omega_J^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

and can be written as follows

$$(38)\quad \{-\sigma + \sigma^{-1}\Omega_A^2 + i\Omega_L\}\{(-\sigma + \sigma^{-1}\Omega_A^2 + i\Omega_L)(-\sigma + \sigma^{-1}\Omega_B^2 + i\tfrac{4}{3}\Omega_L + \sigma^{-1}\Omega_J^2) + (2i\Omega + \sigma^{-1}\Omega_A\Omega_B)(2i\Omega - \sigma^{-1}\Omega_A\Omega_B)\} = 0.$$

Eq. (38) splits into two following equations

$$(39)\qquad \sigma^2 - i\sigma\Omega_L - \Omega_A^2 = 0\,,$$

$$(40)\quad \sigma^4 - i\sigma^3\tfrac{7}{3}\Omega_L - \sigma^2(\Omega_B^2 + \Omega_A^2 + \Omega_J^2 + 4\Omega^2 + \tfrac{4}{3}\Omega_L^2) + i\sigma\Omega_L(\Omega_B^2 + \tfrac{4}{3}\Omega_A^2 + \Omega_J^2) + \Omega_A^2\Omega_J^2 = 0\,.$$

From (39) we obtain two modes of wave propagation

$$\sigma_{(1),(2)} = \frac{i}{2}\Omega_L \pm \frac{1}{2}\{4\Omega_A^2 - \Omega_L^2\}^{1/2}, \tag{41}$$

which in the case of

$$\Omega_L^2 < 4\Omega_A^2 \tag{42}$$

(strong magnetic field parallel to the direction of wave propagation) gives periodic oscillations quenched by the factor $\exp(-\frac{1}{2}\Omega_L t)$. In the limiting case

$$\Omega_L = 0 \tag{43}$$

we obtain two Alfvén waves

$$\sigma_{(1),(2)} = \pm \Omega_A, \tag{44}$$

running in the opposite directions. In the case of a weak parallel magnetic field

$$\Omega_L^2 > 4\Omega_A^2 \tag{45}$$

the two solutions of (39) have the forms, giving the quenching of the type

$$\exp[-\tfrac{1}{2}\{\Omega_L \pm (\Omega_L^2 - 4\Omega_A^2)^{1/2}\}t]. \tag{46}$$

In the limiting case of absence of the parallel field we obtain

$$\sigma_{(1),(2)} = 0; \quad i\Omega_L. \tag{47}$$

Therefore, the solutions (41) in both cases (42) and (45) cannot give instability.

Now we return to the Eq. (40). Eq. 40 after the substitution

$$\omega = i\sigma, \tag{48}$$

becomes an equation with real coefficients

$$\omega^4 + \omega^3 \tfrac{7}{3}\Omega_L + \omega^2(\Omega_B^2 + \Omega_A^2 + \Omega_J^2 + 4\Omega^2 + \tfrac{4}{3}\Omega_L^2) + \\ + \omega\Omega_L(\Omega_J^2 + \tfrac{4}{3}\Omega_A^2 + \Omega_B^2) + \Omega_A^2\Omega_J^2 = 0. \tag{49}$$

Therefore, in the case of a nonvanishing parallel component of the magnetic field ($\Omega_A \neq 0$), it can have a) four real roots $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \omega_{(3)}, \omega_{(4)}$, b) two real $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}$ and two complex roots $\omega_{(3)}, \omega_{(4)} = \omega_{(3)}^{\dagger}$, c) four complex roots $\omega_{(1)}, \omega_{(2)} = \omega_{(1)}^{\dagger}, \omega_{(3)}, \omega_{(4)} = \omega_{(3)}^{\dagger}$. Hence, in the cases a), b), c) we obtain respectively

$$\omega_{(1)} \cdot \omega_{(2)} \cdot \omega_{(3)} \cdot \omega_{(4)} = \Omega_A^2\Omega_J^2, \tag{50}$$

$$\omega_{(1)} \cdot \omega_{(2)} \cdot \mathrm{mod}^2\,\omega_{(3)} = \omega_{(1)} \cdot \omega_{(2)} \cdot \mathrm{mod}^2\,\omega_{(4)} = \Omega_A^2\Omega_J^2, \tag{51}$$

$$\mathrm{mod}^2\,\omega_{(1)} \cdot \mathrm{mod}^2\,\omega_{(3)} = \mathrm{mod}^2\,\omega_{(2)} \cdot \mathrm{mod}^2\,\omega_{(4)} = \Omega_A^2\Omega_J^2. \tag{52}$$

Therefore, if Ω_J^2 is negative (instability of the Jeans' non viscous medium) at least one of the real roots must be positive; case c) cannot take place if Ω_J^2 is negative, and the viscous medium is also unstable. If the magnetic field is perpendicular to the direction of propagation of the perturbation ($\Omega_A = 0$), Eq. (40) takes the form

$$\omega^3 + \omega^2 \tfrac{7}{3}\Omega_L + \omega(\Omega_B^2 + \Omega_J^2 + 4\Omega^2 + \tfrac{4}{3}\Omega_L^2) + \Omega_L(\Omega_B^2 + \Omega_J^2) = 0 . \tag{53}$$

Hence, we can consider two cases. The first: if Eq. (53) has one real $\omega_{(1)}$ and two complex roots $\omega_{(2)}$, $\omega_{(3)} = \omega_{(2)}^{\dagger}$ we obtain

$$\omega_{(1)} \cdot \mathrm{mod}^2\, \omega_{(2)} = \omega_{(1)} \cdot \mathrm{mod}^2\, \omega_{(3)} = -\Omega_L(\Omega_B^2 + \Omega_J^2) . \tag{54}$$

The second: if all roots are real, we obtain

$$\omega_{(1)}\ \omega_{(2)} \cdot \omega_{(3)} = -\Omega_L(\Omega_B^2 + \Omega_J^2) . \tag{55}$$

If

$$\mathrm{sign}(\Omega_J^2 + \Omega_B^2) = -1 , \tag{56}$$

therefore from (54) it follows, that

$$\mathrm{sign}\, \omega_{(1)} = +1 , \tag{57}$$

and from (55) it follows that one of the roots must be positive. Thus, we have instability, if (56) is satisfied. So that in the case, when $\Omega_A = 0$, the critical wavelength giving instability is not greater than for the non viscous medium.

Finally, we can give the general conclusion proved if Ω is perpendicular to the direction of propagation of the perturbation valid in both cases $\Omega_A \neq 0$, $\Omega_A = 0$, that *the critical wavelength of the perturbation in the condition for the magnetogravitational instability of the infinite, homogeneous medium, when a Coriolis force is acting, is not enlarged by viscosity.*

ASTRONOMICAL OBSERVATORY, WARSAW UNIVERSITY
(OBSERWATORIUM ASTRONOMICZNE UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO)
INSTITUTE OF ASTRONOMY, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT ASTRONOMII PAN)

REFERENCES

[1] S. Chandrasekhar, Ap. J. **119** (1954), 7.
[2] — *Vistas in Astronomy*, p. 344. Pergamon Press, 1955.
[3] S. Chandrasekhar, E. Fermi, Ap. J. **118** (1953), 116.
[4] J. H. Jeans, Phil. Trans. A **199** (1902), 1.
[5] — *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge University Press, 1929.
[6] A. B. Severny, *Proceedings of the Second Conference of the Problems of Cosmogony*, p. 363, Moscow, (1953), in Russian.
[7] — Izv. K. A. O. **11** (1954), 129.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys.—Vol. VII, No. 7, 1959

K^-p Scattering and $K^-+p\to Y+\pi$ Reactions

by

J. SZYMAŃSKI

Presented by W. RUBINOWICZ on April 22, 1959

The $K^-+p\to K^-+p$ scattering and the process of production $K^-+p\to Y+\pi$, at energies up to 100 MeV, proceed almost exclusively in the S state. Hence, when computing these processes in the "fixed source" approximation it is necessary to assume scalar K-baryon coupling. If P. V. coupling with KNY is assumed, an attempt may be made to explain the domination of the S state in the scattering process by the domination of the quadratic term in $K(H''=q^2\lambda\bar{N}NKK)$ following from the virtual pairs. The presence of this term in the Hamiltonian does not yield alone an explanation of the S wave in the production process. H'' does not lead to the absorption of K, in the S state in any order of q^2, necessary in the present case. On the other hand, these expressions may be expected to be small just as in the case of π mesons. The problem of $Gg\lambda NYK\pi$ interaction resulting from the reduction of virtual pairs with different vertices presents another aspect. The arguments used in [1]-[3] may not be automatically applied to these expressions. If the latter are large, they may in the case of pseudoscalar K mesons serve to explain the contribution of the ^-S wave to production. The assumption of opposite parities for Λ and Σ automatically leads to the effects required, but is in drastic disagreement with the symmetries hitherto assumed for strong and intermediate strong interactions [4]-[6]. It may seem much more simple to assume scalar coupling for K, all the more as no experimental results are known to contradict such an assumption. Only if it were not possible to obtain agreement with the experimental data along these lines, the necessity would arise of adopting one of the schemes suggested above.

Our calculations seem to point to the impossibility of obtaining results in agreement with experiment in the case of scalar coupling; of course, this is true only if the approximation method used may be considered to be reliable.

The following assumptions are made:

1) scalar coupling between the K and baryonic fields;
2) the coupling between the baryons and π is pseudoscalar;
3) the renormalized baryon $-\pi$ coupling constants may differ independently of the symmetry assumed for the mathematical particles;
4) the computations are carried out by the Tamm-Dankoff method, neglecting the nucleon recoil. We confine ourselves only to the states $|Y\rangle$, $|Y\pi\rangle$, $|NK\rangle$; where $|Y\rangle$ and $|N\rangle$ denote the states of the physical (dressed) particles;
5) in the equations we preserve only expressions which are, at the most, bilinear in the coupling constants;
6) differences in mass between Σ and Λ are neglected, the mass difference between N and Y being taken into account;
7) cut-offs for π interactions are assumed to be the same for all baryons;
8) the Hamiltonian is assumed in the form:

$$H = \mathring{H} + f_N(\bar{N}\vec{\sigma}\tau_a N)(\vec{V}\cdot\pi_a) - f_{\Lambda\pi}[(\bar{\Lambda}\vec{\sigma}\Sigma_a)(\vec{V}\cdot\pi_a) + h\cdot c] + f_{\Sigma\pi}i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\bar{\Sigma}_\alpha\vec{\sigma}\Sigma_\beta)(\vec{V}\cdot\pi_\gamma) + g_\Sigma\bar{N}\tau_a\Sigma_a k + g_\Lambda\bar{N}\Lambda k\,.$$

The results obtained do not agree with experiment. The cross-section for scattering fits the experimental data quite well, whereas those for production disagree completely and it does not seem possible to achieve agreement by any choice of the coupling constants. Disagreement may be due to: a) the method of approximation, b) the assumption of the scalar nature of K.

To solve Schroedinger's equation

$$(H-E)\Psi\rangle = 0\,, \tag{1}$$

$|\Psi\rangle$ is substituted in the form

$$\Psi\rangle = \sum_{\gamma_0} A_{\gamma_0}|Y\gamma_0\rangle + \sum_{\vec{k}s\beta}\chi_{s\beta}(\vec{k})\,b_s^+(\vec{k})|N\beta\rangle + \sum_{\vec{l}r\gamma}\varphi_{r\gamma}(\vec{l})\,c_r^+(\vec{l})|Y\gamma\rangle,$$

where $b_s^+(\vec{k})$ and $c_r^+(l)$ denote the creation operators for mesons K and π, β and γ — the set of spin and isotopic indices for the nucleon and hyperon, respectively. Inserting (2) into Eq. (1) and closing consecutively with $|Y\gamma_0\rangle$, $b_s^+(\vec{k}')N\beta'\rangle$, $c_{r'}^+(\vec{l}')|Y\gamma'\rangle$, a set of equations for A_{γ_0}, $\chi_{s\beta}(\vec{k})$ and $\varphi_{r\gamma}(\vec{l})$ is obtained:

$$(\Delta M - E)A_{\gamma_0'}(\vec{k}_0) + \sum_{\vec{k}s\beta}\chi_{s\beta}(\vec{k})[\langle Y\gamma_0'|V_s^+(\vec{k})|N\beta\rangle - (E-\Omega)\langle Y\gamma_0'|b_s^+(\vec{k})|N\beta\rangle] + \sum\varphi_{rs}(\vec{l})[(\Delta M - E + \omega(l))\langle Y\gamma_0'|c_r^+(\vec{l})|Y\gamma\rangle + \langle Y\gamma_0'|U_r^+(\vec{l})|\gamma\rangle] = 0 \tag{3}$$

$$(4)\quad (\Delta M-E)\sum_{\gamma_0}\langle N\beta'|b_s^-(\vec{k})|Y\gamma_0\rangle A_{\gamma_0}(\vec{k}_0)$$
$$+\sum_{\vec{k}s\beta}\chi_{s\beta}(\vec{k})[(\Omega(k)-E)\langle N\beta'|b_{s'}^-(\vec{k}')b_s^+(\vec{k})|N\beta\rangle+\langle N\beta'|b_{s'}^-(\vec{k}')V_s^+(\vec{k})|N\beta\rangle]$$
$$+\sum_{\vec{l}r\gamma}\varphi_{r\gamma}(\vec{l})[(\Delta M+\omega(l)-E)\langle N\beta'|b_{s'}^-(\vec{k}')c_r^+(\vec{l})|Y\gamma\rangle+\langle N\beta'|b_{s'}^-(\vec{k}')U_r^+(\vec{l})|Y\gamma\rangle]=0$$

$$(5)\quad (\Delta M-E)\sum_{\gamma_0}A_{\gamma_0}(\vec{k}_0)\langle Y\gamma'|c_{r'}^-(\vec{l}')|Y\gamma_0\rangle$$
$$+\sum_{\vec{k}s\beta}\chi_{s\beta}(\vec{k})[(\Omega(k)-E)\langle Y\gamma'|c_{r'}^-(\vec{l}')b_s^+(\vec{k})|N\beta\rangle+\langle Y\gamma'|V_s^+(\vec{k})c_{r'}^-(\vec{l}')|Y\beta\rangle]$$
$$+\sum_{\vec{l}r\gamma}\varphi_{r\gamma}(\vec{l})[(\Delta M+\omega(l)-E)\langle Y\gamma'|c_{r'}^-(\vec{l}')c_r^+(\vec{l})|Y\gamma\rangle+\langle Y\gamma'|c_{r'}^-(\vec{l}')U_r^+(\vec{l})|Y\gamma\rangle)]=0,$$

where $\Omega(k)$, $\omega(l)$ is the kinetic energy of the K and π meson, respectively, $V_s^{\pm}(\vec{k})=\pm[H',b_s^{\pm}(\vec{k})]$, $U_r^{\pm}(\vec{l})=\pm[H',c_r^{\pm}(\vec{l})]$; applying the formulas given by Chew and Low, the action of the annihilation operators on the states of the physical particles is evaluated. Eliminating $A_{\gamma_0}(\vec{k}_0)$ and neglecting expressions of orders higher than two in the coupling constant yields

$$((E-\Omega(\vec{k}'))\chi_{s'\beta'}(\vec{k}')+\frac{E-\Delta M}{\Omega(k')-\Delta M}\Big\{\sum_{\vec{k}s\beta}\chi_{s\beta}(\vec{k})\frac{1}{\Omega(k)-\Delta M}$$
$$\times\langle N\beta'|V_{s'}^-(\vec{k}')V_s^+(\vec{k})|N\beta\rangle+\sum_{\vec{l}r\gamma}\varphi_{r\gamma}(\vec{l})\frac{1}{\omega(l)}\langle N\beta'|[V_{s'}^-(\vec{k}'),\ U_r^+(\vec{l})]|Y\gamma\rangle=0$$

$$(E-\omega(l)-\Delta M)\varphi_{r'\gamma'}(\vec{l}')+\frac{E-\Delta M}{\omega(l')}\Big\{\sum_{\vec{k}s\beta}\chi_{s\beta}(\vec{k})\frac{1}{\Omega(k)-\Delta M}$$
$$\times\langle Y\gamma'|[U_r^-(l)V_s^+(k)]N\beta\rangle+\sum_{\vec{l}r\gamma}\varphi_{r\gamma}(l)\frac{1}{\omega(l)}[\langle Y\gamma'|[U_{r'}^-(\vec{l}'),\ U_r^+(l)]|Y\gamma\rangle\Big\}=0.$$

By elimination of the angular and isotopic variables we obtain for $T=0$

$$((E-\Delta(k))\chi_0(k')+\frac{E-\Delta M}{\Omega(k')-\Delta M}\cdot\frac{1}{\Omega(k')^{1/2}}\Big\{\frac{2g_\Delta^2}{4\pi^2}\hat{K}\chi_0-\frac{i\sqrt{6}}{4\pi^2}(g_\Delta f_\Delta+g_\Sigma f_N)\hat{L}\varphi_0\Big\}=0$$

$$((E-\omega(l')-\Delta M))\varphi_0(l')$$
$$+\frac{E-\Delta M}{\omega(l)^{3/2}}\Big\{\frac{i\sqrt{6}}{4\pi^2}(g_\Delta f_\Delta+g_\Sigma f_N)\hat{k}\chi_0+\frac{1}{4\pi^2}\Big(\frac{10}{3}f_\Delta^2-\frac{2}{3}f_\Sigma^2\Big)\hat{L}\varphi_0\Big\}=0$$

for $T=1$

$$((E-\Omega(k'))\chi_1(k')$$
$$+\frac{E-\Delta M}{\Omega(k)-\Delta M}\frac{1}{\Omega(k)^{1/2}}\Big\{\frac{2g_\Sigma^2}{4\pi^2}\hat{k}\chi_1-\frac{i\sqrt{2}}{4\pi^2}(f_\Delta g_\Sigma+f_N g_\Delta)+\frac{2}{4\pi^2}(f_N+f_\Sigma)g_\Sigma\hat{L}\varphi_3\Big\}=0$$

$$(E-\omega(l')-\Delta M)\varphi_1(l')$$
$$+\frac{E-\Delta M}{\omega(l')^{3/2}}\Big\{\frac{i\sqrt{2}}{4\pi^2}(f_\Delta g_\Sigma+f_N g_\Delta)\hat{k}\chi_1-\frac{4}{3}\frac{f_\Delta^2}{4\pi^2}L\varphi_1+\frac{2\sqrt{2}}{3}if_\Delta f_\Sigma\hat{L}\varphi_3\Big\}=0$$

$$(E-\omega(l')-\Delta M)\varphi_3(l')$$
$$+\frac{E-\Delta M}{\omega(l')^{3/2}}\left\{\frac{2}{4\pi^2}(f_N+f_\Sigma)g_\Sigma\hat{k}\chi_1-\frac{2\sqrt{2}}{3}i\frac{f_\Lambda f_\Sigma}{4\pi^2}L\varphi_1+\frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{7}{3}f_\Sigma^2-\frac{1}{3}f_\Lambda^2\right]\hat{L}\varphi_3\right\}=0\,.$$

The function φ_1 is the amplitude in the state $|\pi\Lambda\rangle$, and φ_3 – that in the state $|\pi\Sigma\rangle$,

$$\hat{K}\chi_i=\int\frac{k^2}{\Omega(k)^{1/2}}\frac{1}{(\Omega(k)-\Delta M)^{1/2}}\chi_i(k)\,dk$$

$$\hat{L}\varphi_i=\int_0^{\omega_{\max}}\frac{l^3}{\omega(l)^{3/2}}\varphi_i(l)\,dl\,.$$

Substituting

$$\chi_i(k)=\frac{\delta(k-k_0)}{k^2}+\frac{f_i(k)}{\Omega(k)-\Omega(k_0)-i\eta}$$

and

$$\varphi_i(l)=\frac{\Phi_i(l)}{\omega(l)-\omega(l_0)-i\eta}$$

yields a set of inhomogeneous integral equations for f_i and Φ_i. Since the kernels are separable, it easily reduces to a set of algebraic equations. The cross-sections are given by $f_i(k)$ and $\Phi_i(k)$ thus:

$$\sigma(K^-+p\to K^-+p)=\frac{1}{16\pi}|f_0+f_1|^2$$

$$\sigma(K^-+p\to\bar{K}^0+n)=\frac{1}{16\pi}|f_0-f_1|^2$$

$$\sigma(K^-+p\to\Sigma^\pm+\pi^\mp)=\frac{1}{8\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_0\right|^2$$

$$\sigma(K^-+p\to\Sigma^0+\pi^0)=\frac{1}{8\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_1\right|^2$$

$$\sigma(K^-+p\to\Lambda^0+\pi^0=\frac{1}{8\pi}|\Phi_\Lambda|^2\,.$$

Numerical computation was carried out for

$$\frac{g_\Lambda^2}{4\pi}=\frac{g_\Sigma^2}{4\pi}=0.7\qquad\frac{f_\Lambda^2}{4\pi}=\frac{f_N^2}{4\pi}=\frac{f_\Sigma^2}{4\pi}=0.085\qquad\omega_{\max}=6\mu\,.$$

The cross-section for elastic K^-p scattering is shown in Fig. 1. Throughout the energy range of 0 – 100 MeV, there is good agreement with experiment. For comparison, the curves obtained by Dalitz, who employed phenomenological phase analysis, are also shown.

The results for production are in total disagreement with experiment. The cross-section obtained for Σ^+ production amounted to 6 mb at $E=0$ and 2 mb at $E=100$ MeV, while that for Σ^0 varies in the range 1-2 mb., for Σ^- it was of the order of 0.1 mb. The one for Λ was of several mb.

The possibilities of improving the present results by an appropriate choice of the coupling constants are rather limited as $\sigma(k^-+p\to k^-+p)$

depends but little on the coupling constants, so that the latter may be varied quite considerably without affecting the degree of agreement with experiment. The branching ratio is a very sensitive function of the coupling constants, e. g. changing the sign of $f_A (f_A \to -f_A)$ leads to $\Sigma^+ : \Sigma^0 : \Sigma^- = 1:1:1$. On the other hand, several estimations seem to

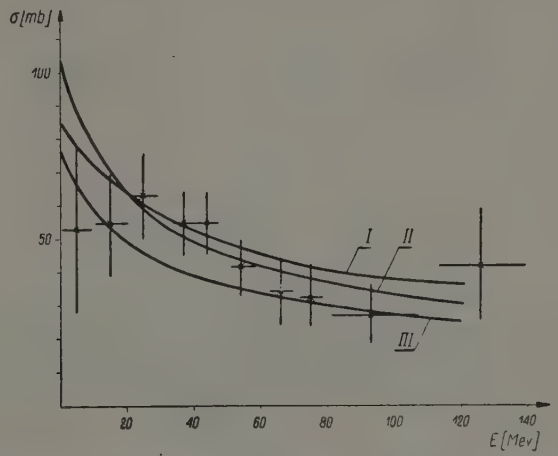

Fig. 1. Experimental points according to Dalitz's report (Geneva 1958); curves I, II obtained phenomenologically by Dalitz, curve III shows author's results.

point to the impossibility of raising the value of the cross-section for production, which varies very slowly with the value of the coupling constant and never exceeds a few mb.

It is rather difficult to point out the sources of this discrepancy. It seems that the latter may be due to: a) an incorrect choice of the coupling (K is pseudoscalar and not scalar, as assumed here), b) processes of higher order in the coupling constant, playing an essential part, c) the importance of neglecting the effects attached to recoil of the nucleon.

The author whishes to thank Professor W. Królikowski for his valuable discussion and many remarks of essential importance.

INSTITUTE OF THEORETICAL PHYSICS, WARSAW UNIVERSITY
(INSTYTUT FIZYKI TEORETYCZNEJ UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO)

REFERENCES

[1] S. Drell and E. M. Henley, Phys. Rev. **88** (1952), 1053.
[2] G. Wentzel, Phys. Rev. **86** (1953), 802.
[3] K. A. Bruckner, M. Gell-Mann and Goldberger, Phys. Rev. **90** (1953), 476.
[4] W. Królikowski, Nucl. Phys. **8** (1957), 461.
[5] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **106** (1957), 1296
[6] B. D'Espagnat, J. Prentki and A. Salam, Nucl. Phys. **5** (1957), 447.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 7, 1959

THEORETICAL PHYSICS

The Ruijgrok — Van Hove Model Expressed in Terms of "Dressed" Operators

by

J. ŁOPUSZAŃSKI

Presented by L. INFELD on May 6, 1959

1. In 1956 Ruijgrok and Van Hove [1] proposed a new model of field theory (hereafter quoted as R.-V. H. M.) which is an extension of the Lee model. Both kinds of heavy particles (hereafter called nucleons and labelled V with the index $q = 1$, and N — with $q = 2$) were treated in the same manner as "dressed" particles. The Hamiltonian of this model reads

$$H = \mathring{H} + V$$

$$\mathring{H} = \sum_{q=1}^{2} \sum_{p} m\psi_q^+(p)\psi_q(p) + \sum_{k} \omega(k)a^+(k)a(k)$$

$$V = -\sum_{k} \omega(k)X(k)[a(k)T(k) + a^+(k)T^+(k)] - \sum_{q=1}^{2} \sum_{p} \delta m_q \psi_q^+(p)\psi_q(p)$$

$$T^+(k) = \sum_{q=1}^{2} \sum_{p} g_q^0 \psi_{q+1}^+(p)\psi_q(p+k)\,.$$

The notation is the same as in [2]. The commutation rules are

$$[a(k), a^+(k)]_- = \{\psi_q(p), \psi_q^+(p)\}_+ = 1\,, \qquad \text{otherwise zero,}$$

This model was later investigated by several authors [2]—[4].

The aim of this note is:

i) to find a suitable "dressing" transformation and express the Hamiltonian in terms of "dressed" operators only, instead of "bare" ones, replacing at the same time the unrenormalized quantities by renormalized ones;

ii) to give a detailed discussion of the eigenvalue problem in terms of the "dressed" representation and check some properties of the Hamiltonian.

We keep the renormalized coupling constants fixed with respect to the cut-off parameter and different from each other. It follows from the discussion given by Ruijgrok and Van Hove [1], [2] that we run into indefinite metric in the Hilbert space as soon as we take the point source limit. Thus, the further goal of our note is

iii) to discuss the metric in the Hilbert space.

2. The natural way to introduce suitable "dressed" operators instead of "bare" operators is to make use of the ingenious idea of Van Hove [5] concerning the asymptotic stationary states (hereafter referred to as a. s. s.) representation. To construct this representation we have to know the eigenstates of the Hamiltonian, which correspond to unperturbed one--particle states, for nucleons as well as for mesons. There exist many transformations which yield the connection between the unperturbed states $|a\rangle$ and the true eigenstates $|A(a)\rangle$, both describing the one-particle system. Each of these transformations is asymptotically equal to the unitary transformation which links the complete orthonormal set $|a\rangle$ with the complete orthonormal set of the eigenstates of the Hamiltonian. We choose for our aim the transformation

$$e^F \sqrt{\overline{N}}\,, \tag{3}$$

where

$$F = \sum_k X(k) a^+(k) T^+(k) \tag{4}$$

and $\sqrt{\overline{N}}$ is a normalization operator defined by

$$\sqrt{\overline{N}}|a\rangle = \sqrt{N(a)}|a\rangle, \tag{5}$$

where $N(a) = \prod_i N(q_i)$. We assume $N(a) \neq 0$ and $\sqrt{\overline{N}}|0\rangle = |0\rangle$.

We call transformation (3) – the "dressing" transformation. The a. s. s. (for an arbitrary number of particles) reads

$$|A(a)\rangle = e^F \sqrt{\overline{N}}|a\rangle\,. \tag{6}$$

This set is complete but not orthogonal. Only a. s. s. belonging to the one-particle system are eigenstates of the Hamiltonian. The "dressed" operators arise from "bare" ones by

$$O_{\text{dressed}} = e^F \sqrt{\overline{N}} O \frac{1}{\sqrt{\overline{N}}} e^{-F}\,. \tag{7}$$

The "dressing" transformation was already investigated by Greenberg and Schweber [4] and applied to R. V. H. M. Our transformation is slightly different from theirs: it secures not only the mass renormalization, but also yields the normalization of the dressed operators as well as the renormalization of the coupling constants.

The Hamiltonian expressed in terms of "dressed" operators reads

$$H = H_{as} + V_{as},$$

$$H_{as} = m \sum_{q=1}^{2} \sum_{p} O_q^+(p)\overline{O_q(p)} + \sum_{k} \omega(k) a^+(k)\overline{a(k)},$$

$$V_{as} = -\sum_{k} \omega(k) X(k) \sum_{q=1}^{2} \sum_{p} g_q \frac{N(q+1)}{N(q)} \Big[e^{-F} O_q^+(p+k) O_{q+1}(p) e^F \overline{a(k)}$$

$$- e^{-F} \sum_{q'=1}^{2} \sum_{p'} g_{q'} X(k) O_q^+(p+k) O_{q'+1}^-(p') \overline{O_{q+1}(p)}\, \overline{O_{q'}(p'+k)}\, e^F \Big]$$

with

$$T^+(k) = \sum_{q=1}^{2} \sum_{p} g_q O_{q+1}^+(p) O_q(p+k) \tag{9}$$

and

$$g_q = g_q^0 \left(\frac{N(q)}{N(q+1)} \right)^{1/2}, \tag{10}$$

H_{as} is the undisturbed "dressed" Hamiltonian and describes "free dressed" particles. It is non-Hermitean. V_{as} is the "dressed" interaction Hamiltonian and describes transient interaction between "dressed" particles.

The new "dress" (8) reveals that the Hamiltonian depends explicitly on the cut-off parameter

$$L = \sum_{k} X(k)^2 = \frac{1}{2v} \sum_{k} \frac{f(k)^2}{\omega(k)^3} \tag{11}$$

through

$$\frac{N(1)}{N(2)} = \frac{\operatorname{tgh} a(L_c - L)}{\operatorname{tgh} a L_c}; \tag{12}$$

here $a = g_1 g_2$, and

$$\frac{g_2}{g_1} = \operatorname{tgh} a L_c, \qquad (g_1 > g_2) \tag{13}$$

gives the definition of the critical value of the cut-off parameter L_c. Thus, we can expect that both the eigenvalues as well as the eigenfunctions will depend on L. We are able to confirm this statement by investigating in detail the behaviour of the energy spectrum and eigenfunctions for nucleon-meson states. However, before we proceed with this investigation, we need some elucidation of the problem of indefinite metric. The region of indefinite metric is characterized by values of L larger than L_c. Here (12) becomes negative and no mathematical meaning can be attached to $N(q)$ as well as to (10) *). Consequently, the relations (6) and (7) become meaning-

*) It should be noted that, should we start in (1) with complex coupling constants, we should have to write absolute values of g^0's in (10) and (12).

less except for the case of no nucleons present. There is no longer a connection between these two sets and between "dressed" and "bare" creation and annihilation operators.

This, however, does not prevent us from performing the computations in a consistent manner also for the region $L > L_c$. The a. s. s. representation enables us to extend our computation scheme from $L < L_c$ to $L > L_c$ without any trouble. Indeed, the Hamiltonian is expressed in terms of "dressed" operators and renormalized quantities, with the exception of factor (12); this factor, however, does not lose its meaning for $L > L_c$, in contrast to $N(q)$. We know how to handle the "dressed" operators, knowing their commutation rules. To make our mathematical scheme complete we adopt the metric tensor in the Hilbert space as given by Ruijgrok [2]. Thus, we are in a position to forget all about the "bare" particle representation which was our starting point. We dispose of a complete and well defined description of the system, due to a. s. s. We just extend our formalism from $L < L_c$ to $L > L_c$ keeping all formulae unchanged. Using the language of a. s. s. we do not run into trouble as Källén and Pauli [6] did by expresssing the ghost state in terms of "bare" particle states. We do not need an *ad hoc* change of the metric when we enter the region $L > L_c$ to save the mathematical consistency of the theory. The metric just adopted changes by itself with L.

We now return to the eigenvalue problem for the nucleon – meson system.

3. The eigenvalue problem for the nucleon – meson system reads

$$H|\Psi_\lambda\rangle = (m-\lambda)|\Psi_\lambda\rangle \,. \tag{14}$$

The eigenfunctions are

$$|\Psi_\lambda\rangle = \Big(\sum_k \alpha_k a^+(k) T^+(k) + \beta\Big) O_a^+(p)|0\rangle \,. \tag{15}$$

We determine $\alpha_\lambda(k)$ and β_λ from

$$\sum_j a(j,k)\alpha_j + \lambda\alpha_k = 0, \tag{16}$$

$$\sum_k b(k)\alpha(k) + \lambda\beta = 0 \tag{17}$$

with

$$a(k,j) \equiv -\gamma_q^2 \omega(k) X(k) X(j) + \omega(k)\delta_{kj}\,, \tag{18a}$$

$$b(k) \equiv -g_q^2 \frac{N(q+1)}{N(q)}\,\omega(k) X(k), \tag{18b}$$

$$\gamma_q^2 \equiv g_{q+1}^2 \frac{N(q)}{N(q+1)} - g_q^2 \frac{N(q+1)}{N(q)} = (-)^q \frac{2a}{\sinh[2a(L_c - L)]}\,. \tag{18c}$$

The eigenvalues are found from the characteristic equations

$$1-\frac{\gamma_q^2}{2v}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)^2}{\omega(k)^2(\omega(k)+\lambda)}=0\,. \tag{19}$$

Below we draw a picture representing qualitatively the dependence of $h_q(\lambda)$ on λ. From the analysis of (19) it follows that both h_1 and h_2 have n poles at $-\omega(1), -\omega(2) \ldots -\omega(n)$ between $-\omega(1)$ and $-\omega(n)$ lie $(n-1)$ roots, the position of the n-th root depends on the sign of $\sin h[2a(L_c - L)]$. For $L < L_c$ the n-th root of h_1 falls into the interval $(-\infty, -\omega(n))$; since $n \to \infty$ and $\lim \omega(n) = \infty$ this root lies at infinity, and has no practical meaning. For $L > L_c$ the n-th root of h_1 lies between $-\omega(1)$ and $+\infty$. For $v \to \infty$ the zero points between $-\omega(1)$ and $-\omega(n)$ as well as the poles at $-\omega(k)$ merge into a cut along the real axis in the complex plane λ, extending from $-\omega(1)$ to $-\omega(n)$. Since $h_1(\lambda)$ is no longer a one-valued function, we get three sets of meson-nucleon scattering states, instead of one: the first – if we reach the cut from above (out), the second – from below (in), the third – taking the principal value (standing waves). The n-th root becomes a bound state level; in particular for $L > L_c$ it is the "ghost". It is obvious that the "ghost" can be larger than zero, e. g. for L sufficiently close to L_c. The "ghost" state has a negative norm. As regards h_2 the n-th root is placed between $-\omega(1)$ and $(+\infty)$ for $L < L_c$, and between $(-\infty)$ and $-\omega(n)$ for $L > L_c$. Since the graph of $h_2(\lambda)$ for $L < L_c$ is a mirror image of the graph of $h_1(\lambda)$ for $L > L_c$, the roots (as well as the poles) are identical in both cases. Thus, the bound state level for h_2 and $L < L_c$ is identical with the "ghost", mentioned above. It follows that for $q = 2$ (let us bear in mind that g is the smaller coupling constant) there exist in

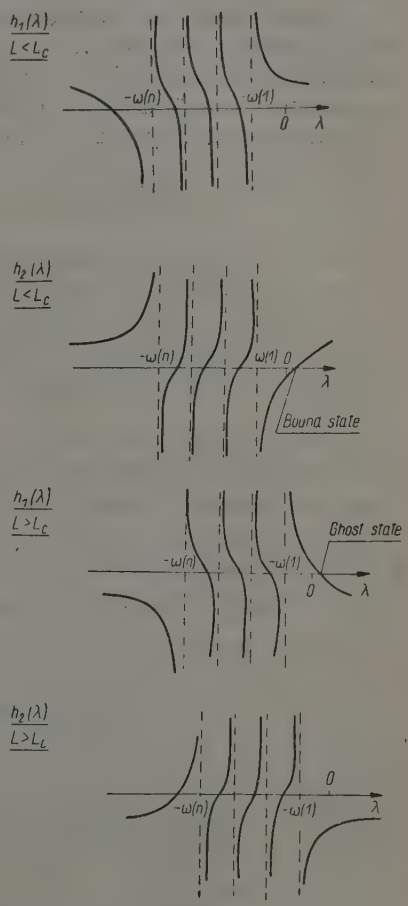

Fig. 1

the limit $v \to \infty$ a bound state due to one nucleon and one meson with energy $(m - \lambda_2(1))$ which can be smaller than m. The norm of this bound state is positive. Also h_1 for $L < L_c$ is a mirror image of h_2 for $L > L_c$. For $L \to L_c$ the bound state levels tend to $+\infty$. For $L \to \infty$ the energy spectrum is the same as for the free particle case.

From Eqs. (16), (17), (18) we see that a simultaneous change of q to $q+1$ and $L = L_c + \epsilon$ to $L = L_c - \epsilon$ will not cause changes in (16); consequently the eigenvalues are not influenced by this substitution, while Eq. (17) will be so; $b(k)$ changes not only its sign but also its form. Most important, however, is the change of sign. Thus, the bound state belonging to $q = 2$, $L = L_c - \epsilon$ will have the same coefficients $\alpha(j)$ as the "ghost" state ($q = 1, L = L_c + \epsilon$), but different $\beta's$ having opposite signs, The norm written by means of the metric tensor reads

$$(20) \qquad \langle \Psi_\lambda | \Psi_\lambda \rangle = \frac{1}{\lambda^2} \Big\{ \lambda^2 g_q^2 \sum_k \sum a_j^* a_k [\delta_{jk} + g_{q+1}^2 X(k) X(j)]$$

$$+ \lambda g_q^4 \frac{N(q+1)}{N(q)} \sum_k \sum_j a_j^* a_k X(k) X(j) [\omega(k) + \omega(j)]$$

$$+ g_q^4 \left(\frac{N(q+1)}{N(q)} \right)^2 \sum_k \sum_j a_j^* a_k \omega(j) \omega(k) X(j) X(k) \Big\}.$$

The negative norm of the "ghost" state is due to the second term in (20). which has different signs for both cases mentioned above.

4. We conclude our note with some remarks on the metric and on the a. s. s. representation. For $L > L_c$ the metric becomes indefinite; that it is really so we can infer from the negative norm of the "ghost" state, as well as from the negative value of $\frac{N(1)}{N(2)}$ [3].

Usually computations start with the "bare" particle state representation. All states with positive norm, particularly all eigenfunctions of the system for $L < L_c$, can be expressed as a linear combination of $|\alpha\rangle$. Of course, each linear combination of $|\alpha\rangle$ has a positive norm.

For $L > L_c$ trouble with some of the eigenfunctions arises, viz. with the "ghost" state. To circumvent the difficulties a new metric [6] invented *ad hoc* may be introduced.

Following the ideas of Van Hove we employed throughout this note the a. s. s. representation. With the help of this representation we are able to express eigenstates not only with a positive but also with a negative norm. The a. s. s. show behaviour different from that of unperturbed states. The linear combination of a. s. s. should not have a positive norm. For $L > L_c$ the one-to-one correspondence between the set $|\alpha\rangle$ and $|A(\alpha)\rangle$ can no longer be maintained, the a. s. s. escape partly into another space with indefinite metric; simultaneously with the a. s. s. also the

eigenstates escape into this new space, covered by a. s. s. Thus, the states $|\alpha\rangle$ are no longer adequate to describe the physical situation for $L < L_c$. On the contrary, the a. s. s. representation is very appropriate for describing the behaviour of the system for $L > L_c$ as well as for $L < L_c$. This feature of the a. s. s. representation is quite general and does not depend on the special nature of the model under consideration. Whereas the splitting of the Hamiltonian in the free particle and interaction part is usually done in a rather arbitrary manner which has little to do with physical reality (except in the case of pure transient interaction) the splitting presented in (8) has a much better foundation; the true scattering eigenstates go over asymptotically into a. s. s. One may also say in favour of a. s. s. that there is a freedom of choice of representation, as there are many different a. s. s. On the other hand, it may be objected that it is not always easy to find these a. s. s. Nevertheless, it is easier to find a "dressing" transformation than an exact unitary transformation yielding exact solutions.

The author is greatly indebted to Professor L. Van Hove for his most valuable and constructive criticism, discussions and constant encouragement and is very grateful to Dr. T. Ruijgrok for many fruitful discussions. He also wishes to express his cordial thanks to Professor Van Hove for the kind hospitality extended to him at the Instituut voor Theoretische Fysica in Utrecht.

A more extensive paper on this subject will appear in Physica.

This paper was prepared while on leave of absence from the University of Wrocław, Institute for Theoretical Physics, Wrocław, Poland.

INSTITUTE OF THEORETICAL PHYSICS OF THE UNIVERSITY UTRECHT, NETHERLANDS
(INSTITUUT VOOR THEORETISCHE FYSICA DER RIJKSUNIVERSITEIT, UTRECHT, NEDERLAND)

REFERENCES

[1] Th. W. Ruijgrok and L. Van Hove, Physica **22** (1956), 880.
[2] Th. W. Ruijgrok, Physica **24** (1958), 185; ibid. 205.
[3] G. F. Dell' Antonio, F. Duimio, Il Nuovo Cimento **5** (X) (1957), 1636.
[4] O. W. Greenberg, S. S. Schweber, Il Nuovo Cimento 8 (X) (1958), 378.
[5] L. Van Hove, Physica **21** (1955), 901; **22** (1956), 343.
[6] G. Källén, W. Pauli, Dan. Mat. Fys. Medd. **30** (1955), No 7.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 7, 1959

EXPERIMENTAL PHYSICS

Raman Spectra of Chloroform in Solutions With Diethylamine

by

S. BRAHMS

Presented by A. JABŁOŃSKI on May 9, 1959

The changes in the intensities of the infra-red absorption corresponding to the C—H stretching vibration of chloroform in solutions with basic solvents indicate that between the hydrogen of the chloroform and the donor of the solvent there forms a bond of the hydrogen type [1], [2]. It may be expected, that, as a result of the formation of the complex, a redistribution of the charge should occur in the chloroform molecule as a whole. Consequently, the intramolecular bonds which do not take part in the intermolecular bonds should also be affected. In this paper, we present the results of an investigation of the influence of the solvent on the frequencies, half-widths and intensities of the Raman lines corresponding to the vibrations of the CCl_3 group of chloroform. A strong base, the dimethylamine, was chosen as solvent. Changes in the spectral properties of Raman lines are given as a function of the composition of the solution and an attempt is made to interpret them.

Experimental part

We have examined the Raman spectra of chloroform in solutions with diethylamine of the following compositions: 66, 50, 33, 25, 20% mole of $CHCl_3$, at temperatures of 10° C. The temperatures of the solutions were changed within the range of $-60°$ to $+40°$ C for compositions with 50 and 30% mole of $CHCl_3$. The spectra were obtained on photographic "Agfa Raman Platten" by means of a Huet BII spectrograph with increased dispersion. To increase the dispersion the prisms were shifted from the position of minimum deviation [3]. In this way, we obtained a dispersion of about 6Å/mm in the region of the excitation line (Hg 4358A). The samples were excited by a low-pressure quartz mercury lamp of a somewhat modified Sosiński type [4]. The intensity distribution of the lines was obtained by the usual photometric method. The relative intensities were determined by measuring the areas under the intensity distribution curves by means of a planimeter and were compared with the intensity of the $\nu_3 = 336\ cm^{-1}$ line, which was taken as standard $I_{336\,cm^{-1}} = 100$.

Results and discussion

Table I shows the changes in the spectral properties with variation in the composition of the solutions for the lines corresponding to the fully symmetric and antisymmetric stretching vibrations of the CCl_3 group of chloroform $\nu_2 = 667$ cm^{-1} and $\nu_5 = 762$ cm^{-1}, respectively, and to the symmetric and antisymmetric bending vibrations of the CCl_3 group of chloroform $\nu_3 = 366$ cm^{-1} and $\nu_6 = 261$ cm^{-1}, respectively. The intensities and frequencies of the lines corresponding to the bending vibrations $\nu_3 = 366$ cm^{-1} and $\nu_6 = 261$ cm^{-1} remain constant in all solutions. At concentrations below 50% mole, i. e. in solutions with a surplus of amine molecules, the width of these lines slightly increases, probably under the influence of the orientation field of molecules of the solvent. A narrowing in the line width and a decrease in the frequency was observed for the $\nu_5 = 762$ cm^{-1} line. Whiffen [5] found a similar decrease in width for the infra-red absorption band corresponding to this frequency in chloroform solutions. The shape of this line, however, did not change. On the other hand, a very distinct change in the contour of the line corresponding to the same vibration in solutions of bromoform has been observed [6].

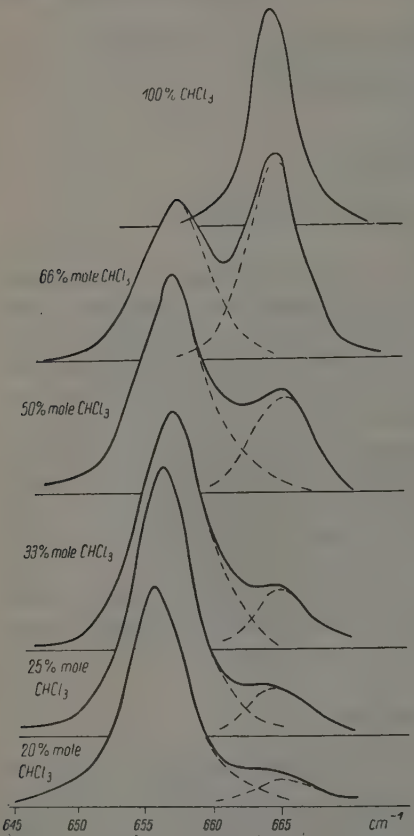

Fig. 1. Variation of the contour of the ν_2 and ν_2^* line of $CHCl_3$ with solution composition

The greatest change takes place for the ν_2 line corresponding to the fully symmetric stretching vibration (Fig. 1). Its intensity markedly decreases with a decrease in the concentration of the solution, and alongside it, about 12 cm^{-1} towards lower frequencies, there arises a new line $\nu_2^* = 655$ cm^{-1} whose intensity increases with a decrease in dilution. The sum of intensities of the ν_2 i ν_2^* lines remains nearly constant for all solutions. It is evident that the ν_2^* line is associated with the formation of an intermolecular complex between the hydrogen of the $CHCl_3$ and

TABLE

Raman lines of the CCl_3 group vibrations of the chloroform in solutions with diethylamine at a temperature of 10° C

% mole of $CHCl_3$	ν_2			ν_2^*			ν_5		ν_3			ν_6		
	ν cm^{-1}	σ cm^{-1}	I	ν cm^{-1}	σ cm^{-1}	I	ν cm^{-1}	σ cm^{-1}	ν cm^{-1}	σ cm^{-1}	I	ν cm^{-1}	σ cm^{-1}	I
100 %	667	4.3 ± 0.2	120 ± 10				762 ± 1	30 ± 1	366	5.6 ± 0.3	100	261	6.5 ± 0.3	105
66 %	667	5 ± 0.2	58	658 ± 0.2	7 ± 0.3	45	760 ± 1	28 ± 1	366	5.6 ± 0.3	100	261	6.5 ± 0.3	108
50 %	667	5.8 ± 0.4	34	657.4$\pm$0.3	7 ± 0.3	70	756 ± 1	25 ± 0.5	366	6.2 ± 0.3	100	261	7.3 ± 0.3	115
33 %	667	5.8 ± 0.3	20	657,1$\pm$0.3	7.5 ± 0.5	86	753 ± 1	23 ± 0.8	366	7.1 ± 0.6	100	262	7.3 ± 0.3	105
25 %	667	6.2 ± 0.3	14	656.8$\pm$0.2	7.5 ± 0.5	96			366	6.8 ± 0.2	100	262	7.6 ± 0.2	105
20 %	666	6.1 ± 0.4	8	656 ± 0.2	6.8 ± 0.2	100			366	7.5 ± 0.3	100	262	7.6 ± 0.2	108

ν, σ, I – the frequencies, half-widths and intensities of the Raman lines

the nitrogen of the amine and corresponds to the C—Cl bond in the complex. In the free chloroform, a rather high electron density is concentrated on the chlorine atoms, thus leaving the hydrogen proton partially unscreened. There occurs in the complex a partial transfer of the lone pair of electrons of the nitrogen atom of the amine molecule in the direction of the C—H bond. This results in an increase in the electron density of this bond and consequently in a more uniform charge distribution in

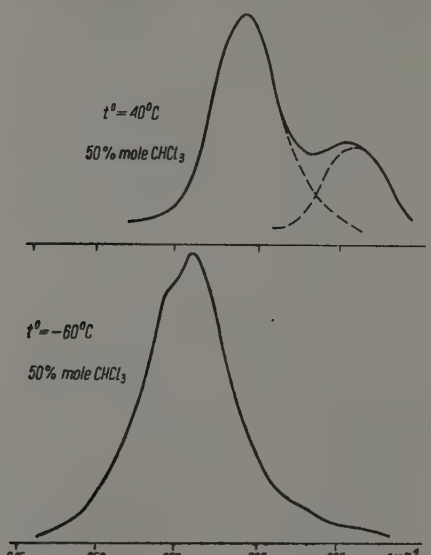

Fig. 2. Variation of the contour of the ν_2 line with temperature

the bonded molecule of the chloroform. Such an increase in the electron density in the direction of the carbon atom can be the cause of a rather considerable displacement of the frequency (about 2%) and a broadening of the line belonging to the fully symmetric C—Cl vibration.

As the temperature drops, the ν_2^* line becomes wider and its frequency shifts towards lower values (Fig. 2). Such a continuous change of position and width with an increase in temperature may be caused by interactions of the van der Waals type between the molecules of the complex. The spectral properties (ν, σ, I) of the other investigated lines, ν_6 and ν_3, remain practically unchanged with variation of temperature.

Measurements of the intensities of the ν_2 i ν_2^* lines at different temperatures allow to calculate the heat of formation of the complex, i. e. the energy of the hydrogen bond. This value turned out to be 3,9 $\frac{\text{Kcal}}{\text{mole}}$ and is in good agreement with the value obtained by Huggins and Pimentel [7] for the complex of chloroform and triethylamine.

The author wishes to thank Dr T. Skaliński for his interest in this work.

LABORATORY OF MOLECULAR OPTICS, INSTITUTE OF PHYSICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(ZAKŁAD OPTYKI MOLEKULARNEJ, INSTYTUT FIZYKI PAN)

REFERENCES

[1] S. Brahms, Diploma thesis, 1955.
[2] C. H. Huggins and G. C. Pimentel, J. Chem. Phys. **23** (1955), 896.
[3] B. M. Malishev, Izv. A. N. SSSR **16** (1950), 6.
[4] M. L. Sosinski, Izv. A. SSSR **18** (1954), 709.
[5] D. A. Whiffen, Trans. Far. Soc. **49** (1953), 878.
[6] S. Brahms, Bull. Acad. Polon., Sci. Série des sci. math. astr. et phys. **7** (1959), 531.
[7] C. H. Huggins and G. C. Pimentel, J. Chem. Phys. **23** (1955) 1244.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 7, 1959

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE

Le spectre Raman du deuxième ordre du tetrachlorure de titanium

par

B. MOSZYŃSKA

Présenté par A. JABŁOŃSKI le 21 mai 1959

Introduction

Le spectre Raman du deuxième ordre comprend des raies, dont l'apparition est interdite par les règles de selection pour l'oscillateur harmonique. Ces raies, à savoir les harmoniques supérieures et les raies d'intercombinaison, ne paraissent que grâce à l'anharmonicité du mouvement vibratoire d'une molécule réelle.

Dans le travail précédent [1] nous avons déjà signalé les valeurs approximatives des fréquences et des demi-largeurs des raies du deuxième ordre observées dans le spectre Raman de $TiCl_4$. Maintenant on peut présenter des résultats plus précis concernant les fréquences et les largeurs, et, ce qui est le plus important, on peut y ajouter les valeurs des intensités.

Technique expérimentale

L'appareillage a déjà été décrit [2]. Il comprend le spectrographe Huet B II et un montage habituel dans la technique ramanienne, dans lequel la cuvette et la lampe sont enfermées dans le miroir elliptique.

Comme les études du spectre du deuxième ordre exigent la meilleure possible suppression de la lumière parasite provenant des reflexions sur les parois de la cuvette, il fallait poursuivre exactement les règles de Nielsen [3] concernant un montage avec une lentille convergente.

Les mesures des intensités ont été basées sur les propriétés des plaques employées "Agfa Ramanplatten", pour lesquelles le coefficient de Schwarzschield est strictement égal à l'unité, c'est à dire pour lesquelles l'intensité de la raie obtenue de la plaque est proportionnelle au temps de la pose photographique de la plaque. L'exactitude de cette relation a été confirmée experimentalement.

Afin d'obtenir les valeurs relatives des intensités des raies du deuxième ordre il suffit de mesurer les rapports des intensités des raies du spectre du deuxième ordre envers l'intensité d'une raie du spectre du premier ordre photographié sur la même plaque et multiplier le résultat par la réciprocité des rapports des temps des poses des spectres comparés.

Afin d'éliminer l'influence de l'affaiblissement de la lumière diffuse dûe au noircissement de la lampe, dont le rôle devient significatif pendant de longues expositions, on répétait deux fois une exposition courte (celle, dont on se servait pour obtenir le spectre du premier ordre): c'est à dire on faisait trois expositions sur la même plaque, à savoir, une exposition courte, une exposition longue et encore une exposition courte.

C'est la moyenne arithmétique des intensités des raies du premier ordre obtenue à l'aide de ces deux spectres que l'on a employée pour le comparaison avec les intensités des raies du deuxième ordre.

La comparaison des intensités donne les meilleurs résultats quand les deux spectres à comparer comprennent le même fond continu. Pour obtenir ces conditions-là on irradiait avec la lampe à incandescence la même place sur la plaque où une courte pose du spectre Raman avait été effectuée précédemment.

Comme étalon de la répartition spectrale de la sensibilité de l'emulsion photographique de la plaque on a employé, suivant Landsberg, Bajouline et Souchtchynski [4], le spectre de fluorescence de la solution de sulfate de quinine excité par la raie 3650 Å. de mercure.

Comme mesure de l'intensité intégrale de la raie on a pris l'aire limitée par le profil de la raie tracé en échelle des intensités.

Résultats

On n'a examiné que les trois raies du deuxième ordre de $TiCl_4$, à savoir $\nu_2+\nu_3$, $2\nu_1$, et $\nu_1+\nu_3$, car les raies provenant des vibrations fondamentales sont partiellement superposées à toutes les autres.

La figure réprésente les profils de ces trois raies, au dessus desquelles on a donné à titre de comparaison les profils des raies du premier ordre.

Quoique les raies ν_2 et ν_4 soient situées tout près l'une de l'autre, la séparation graphique fournit peu de difficulté. La raie ν_3 constitue une large bande qui se compose de trois raies: ν_3', ν_3'' et $\nu_1+\nu_4$.

Le profil de la bande $\nu_1+\nu_3$ est tout à fait semblable à celui de la raie ν_3, on y peut aussi distinguer trois composantes analogues, mais un peu plus larges que celles de la bande ν_3. La raie $\nu_2+\nu_3$ est asymétrique; c'est parce qu'elle est accompagnée du côté des hautes fréquences par les raies $\nu_4+\nu_3$, $\nu_2+(\nu_1+\nu_4)$ et $(\nu_1+2\nu_4)$, qui, heureusement, ont toutes les trois des intensités beaucoup plus faibles. Une séparation raisonnable de ces quatre raies semble être en ce cas impossible; on peut tout au plus chercher à déterminer la position de la raie $\nu_1+2\nu_4$ (664 cm^{-1} environ).

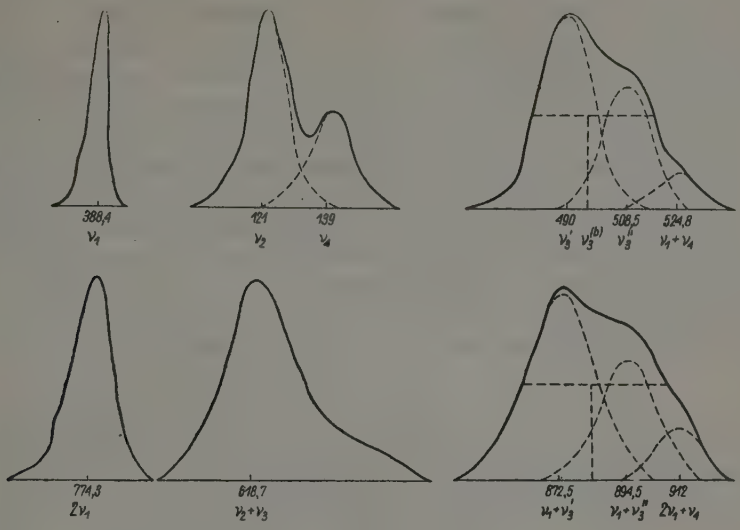

Fig. 1

TABLEAU

1	2	3	4	5
Designations des fréquences	Fréquences	Largeurs	Intensités	
			I_{exp}	I
ν_2	121,0 $\pm$ 0,6	11,0 $\pm$ 0,2	1160 $\pm$ 135	183
ν_4	139,0 $\pm$ 0,4	13,6 $\pm$ 0,2	580	115
ν_1	388,4 $\pm$ 0,5	6,7 $\pm$ 0,2	1000	1000
ν_3	490,2[a] $\pm$ 0,5 497,5[b] $\pm$ 0,5	35,4 $\pm$ 0,5	280 $\pm$ 20	364
ν_3'	490	20,3	166	225
ν_3''	508,5	16,6	86	122
$\nu_1+\nu_4$	524,8 $\pm$ 0,5	15,3	28	17
$\nu_2+\nu_3$	618,7 $\pm$ 1	25,7 $\pm$ 2	7,8 $\pm$ 0,6	5,8
$2\nu_1$	774,3 $\pm$ 0,2	14,5 $\pm$ 0,7	1,4 $\pm$ 0,1	1,4
$\nu_1+\nu_3$	874,0[a] $\pm$ 1 884,0[b] $\pm$ 1	48 $\pm$ 2	2,4 $\pm$ 0,1	5,5
$\nu_1+\nu_3'$	872,5 $\pm$ 1	27	1,4	3,4
$\nu_1+\nu_3''$	894,5	22	0,7	1,7
$2\nu_1+\nu_4$	912	19	0,3	0,4

Le tableau donne les valeurs obtenues pour les fréquences, les largeurs à demi d'intensité et les intensités des raies observées. Chaque valeur introduite dans le tableau est une valeur moyenne obtenue de trois jusqu'à huit mesures.

Pour les bandes ν_3 et $\nu_1+\nu_3$ on a donné dans le tableau d'abord les valeurs caractéristiques concernant les bandes considerées en totalité

et ensuite les valeurs concernant les composantes. L'index [a] designe les fréquences au maximum de la bande; l'index [b] désigne la moyenne arithmétique des fréquences, pour lesquelles l'intensité de la raie Raman se réduit à demi. Toutes les intensités sont exprimées en échelle arbitraire, admettant, comme étalon égal à mille, l'intensité de la raie ν_1, dûe à la vibration de valence Ti-Cl. Tandis que la position de maximum de la raie $\nu_2+\nu_3$ donne réellement la fréquence de la vibration correspondant à cette raie, la largeur mesurée est un peu agrandie par la présence de la raie $\nu_4+\nu_3$; l'intensité que l'on a donnée comme l'intensité de la raie $\nu_2+\nu_3$ c'est en réalité la somme des intensités de toutes les quatre raies mentionnées ci-dessus.

Les valeurs I données dans la colonne 5, reliées avec I_{exp} par la relation (1) $I = I_{\text{exp}}\left(1-\frac{\nu_i}{\nu_0}\right)^{-4}\nu_i(1-e^{-\frac{h\nu_i}{kT}})$ sont indépendantes des facteurs statistiques et des fréquences *). Elles représentent donc cette partie de l'intensité de la raie, qui provient des transitions vibratoires, pour lesquelles les niveaux normaux sont des niveaux initiaux.

Les valeurs I autorisent à comparer les activités des transitions vibratoires, pour de différents modes des vibrations.

Les déviations moyennes des valeurs moyennes des largeurs et les intensités n'atteignent jamais 10 p. c. pour les raies du deuxième ordre, ainsi que pour celles du premier ordre.

Discussion des résultats

On a jadis observé le dédoublement de la raie ν_3 [1], [6], mais la cause de ce dédoublement n'a été point expliquée. Il paraît, qu'il résulte des interactions intramoleculaires qui ont lieu dans $TiCl_4$ liquide, grâce auxquelles les molecules se déforment et leur symétrie devient C_{3v} au lieu d'être T_d.

Ce problème sera encore discuté dans une autre publication.

Les raies du deuxième ordre sont plus larges que celles du premier ordre, mais la supposition, que la largeur de la raie d'intercombinaison soit la somme des largeurs des raies dûes aux vibrations composantes [7], n'est pas justifiée. Les largeurs de ces raies dépendent surtout des déplacements isotopiques et de la symétrie d'une vibration et c'est elle qui conditionne le degré de la dépolarisation d'une raie. Evidemment les raies dépolarisées sont en principe plus larges, que les raies polarisées.

La largeur de la raie polarisée $2\nu_1$ (qui correspond à la vibration A) s'explique par les déplacements isotopiques; elle est relativement étroite.

*) L'intensité d'une raie Raman s'exprime par la formule:

$$L = \frac{2^8\pi^6\cdot h}{9c^4\cdot 8\pi^2 m_i}\cdot\frac{(\nu_0-\nu_i)^4}{\nu_i}\cdot(5b_i'^2+13g_i'^2)\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{h\nu_i}{kT}}}$$

où ν_0 designe la fréquence excitatrice, ν_i — la fréquence de vibration; voir [5].

La symétrie des vibrations $\nu_2+\nu_3$ et $\nu_1+\nu_3$ exige que les raies correspondant à ces vibrations soient dépolarisées; ces raies sont les plus larges. Le fait que les raies ν_3'' et $\nu_1+\nu_3''$ sont moins larges que les raies ν_3' et $\nu_1+\nu_3'$ semble suggérer que les premières sont attribuées aux vibrations d'une plus haute symétrie; cela prouverait que la supposition ci-dessus mentionnée de la cause du dédoublement de la raie ν_3 était juste. En ce cas-là il faudrait supposer que ν_3' correspond à la symétrie E, ν_3'' — à la symétrie A.

Il est intéressant que le profil de la raie $\nu_2+\nu_3$ ne ressemble point à celui de la raie ν_3; il est plutôt semblable à celui de la raie ν_2; et pourtant la fréquence $\nu_2+\nu_3$ c'est la somme de la fréquence ν_2 et de la fréquence à la moitié de la bande ν_3. En outre, la transition vibratoire correspondant à la fréquence $\nu_2+\nu_3$ est plus active, que celle qui correspond à la fréquence $\nu_4+\nu_3$.

Toutes les raies du deuxième ordre, sauf la raie $\nu_1+\nu_4$, renforcée par la résonance de Fermi sont du même ordre de grandeur d'intensité.

INSTITUT DE PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE DE L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE
(INSTYTUT FIZYKI DOŚWIADCZALNEJ UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO)

OUVRAGES CITÉS

[1] B. Moszyńska, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, **5** (1957), 819.
[2] — ibid. **4** (1956), 769.
[3] J. R. Nielsen, J. Opt. Soc. Am. **20** (1930), 701.
[4] G. S. Landsberg, P. A. Bajouline, M. N. Suchtchyński, *Paramètres ordinaires des spectres des hydrocarbures* (en russe) Moscou, 1956.
[5] M. W. Wolkenstein. M. A. Eliachewitch et B. J. Stiepanow, *Vibrations des molecules* v. II (en russe) Moscou, 1949, p. 53.
[6] M. L. Delwaulle et F. Francois, C. R. **220** (1945), 137.
[7] H. L. Welsh, M. F. Crawford and G. D. Scott, Journ Chem. Phys. **16** (1948), 97.

БЮЛЛЕТЕНЬ
ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ, АСТРОНОМИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Резюме статей

ТОМ VII 1959 ВЫПУСК 7

Ф. ЧАЧ, ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПРОБЛЕМЕ О. Ю. ШМИДТА . . . . . стр. 369—372

Через EU-группы понимаются такие бесконечные группы, все собственные подгруппы которых конечны. О. Ю. Шмидт поставил вопрос описать все EU-группы. В работе приводится частичное решение этой проблемы путем описания всех EU-групп, принадлежащих к некоторым довольно обширным классам, содержащим в частности класс всех абелевых групп.

С. ГЛИДМАН, НЕСКОЛЬКО ТЕОРЕМ, КАСАЮЩИХСЯ АЛГОРИФМА ГАУССА И ПРОЦЕССА ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ВЕКТОРОВ МАТРИЦЫ . . . . . стр. 373—379

1. Используя результаты работы Малишева [3], автор находит, что координаты внешнего вектора $\bar{\alpha}_{r,s}$ и координаты линейного оператора триангуляции матрицы по методу Гаусса [1], определенному формулой (4), связаны соотношениями (5), где $\alpha^{l}_{r,s}$ обозначает l-ую координату вектора $\bar{\alpha}_{r,s}$.

2. Формулой (6) определяется вектор $\bar{\omega}_{r,s}$, являющийся оператором ортогонализации матрицы.

Доказывается, что при данном r, системы векторов $\bar{\alpha}_{r,s}$ [3] и $\bar{\omega}_{r,s}$ — изометрические (изометрическими названы системы векторов, состоящие из векторов соответственно равной длины, составляющих между собой соответственно равные углы).

3. Методом индукции выведены формулы (10) и (11), выражающие вектор-функции $\bar{u}_{r,s}$ и $\bar{\omega}_{r,s}$ в зависимости от аргументов $\bar{a}_i$. Из них следуют формулы (14)-(18), содержащие *эффективный* переход от данной матрицы к матрицам треугольной и семиортогональной [1].

4. Найдена связь между процессами триангуляции и ортогонализации матрицы; доказано, что процесс ортогонализации сводится к процессу триангуляции матрицы Грама данной матрицы.

Я. КИСЫНЬСКИЙ, О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА . . . . . стр. 381—385

Условие единственности Камке является достаточным условием для существования и единственности решений, а также сходимости их последова-

тельных приближений для обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве Банаха.

А. МОСТОВСКИЙ, О НЕКОТОРОМ КЛАССЕ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АРИФМЕТИКИ ВТОРОГО ПОРЯДКА . . . . . стр. 401—404

Настоящая работа является продолжением работы [3]. Автор рассматривает некоторое множество моделей для системы арифметики натуральных чисел, содержащей функциональные переменные. В этой системе можно написать формулу Bord(a), которая обозначает, что соотношение вида $a(x, y) = 0$ вполне упорядочивает множество всех индивидов. Некоторую модель p автор называет β-моделью, если для каждой двуместной функции φ из этой модели истинно следующее: если φ удовлетворяет в модели p формуле Bord(a), то соотношение $\varphi(n, k) = 0$ вполне упорядочивает множество натуральных чисел модели p. Автор описывает множество высказываний истинных в этих моделях, а также класс множеств натуральных чисел, представляемых в множестве истинных высказываний в этих моделях.

И. Р. ШЕНФИЛЬД, ОБ ОГРАНИЧЕННОМ ПРАВИЛЕ ω . . стр. 405—407

Как известно из результатов Геделя, формализированная система арифметики является неполной и если мы к ней прибавим произвольное эффективное правило умозаключения, то она продолжает быть неполной. Если же к ней прибавить неэффективное правило ω, то система становится полной. Правило ω состоит в том, что оно делает возможным присоединить к теории теорему вида $A(x)$, если только все ее подстановки $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... являются теоремами теории.

В работе рассматривается некоторое ограничение правила ω, введенное Новиковым и состоящее в требовании, чтобы доказательства формул $A(n)$ были эффективной функцей переменной n. Автор доказывает, что так ограниченное правило ω дает возможность получить все истинные арифметические высказывания. Следующая проблема остается открытой: можно ли получить при помощи этого правила все те теоремы, содержащие связанные функциональные переменные, которые получаются при помощи полного правила ω.

Ч. ЯНКЕВИЧ, О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ НЕТЕР . . . . . стр. 409—411

Показано, что всякой комитанте с M компонентами, определенной относительно ϱ параметрической группы преобразований соответствует ϱM обобщенных законов сохранения. В особом случае, когда комитанта является скалярной плотностью веса $(+1)$ получается ϱ обыкновенных законов сохранения (теорема Е. Нетер).

О. ТАММИ, ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ . . . . . стр. 413—417

В работе рассматривается класс $(S)_L$ однолистных функций вида

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots,$$

где $|z| < 1$, которые отображают круг $|z| < 1$ на некоторое подмножество фиксированной области L. Эти классы являются естественным обобщением известного класса ограниченных однолистных функций. Приводятся условия на область L, чтобы этот класс не был пустой или слишком узкий. Кроме того, приводится метод получения так наз. постоянной Кэбе в любом классе $(S)_L$. В случае, когда область L есть круг с центром отличным от нуля, вычисляется эффективное значение постоянной Кэбе и приводится точная оценка коэффициентов a_2 и a_3.

П. ШЕПТЫЦКИЙ, ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ . . . . . стр. 419—424

Доказывается теорема существования для квазилинейной эллиптической системы (3), а именно: *для всякой функции* $\varphi \in C_{2+\gamma_1}(\partial\Omega)$, $\gamma_1 > 0$, *существует решение* $u \in C_{2+\gamma_1}(\Omega)$ *системы* (3), *удовлетворяющее граничному условию* $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Доказательство существенным образом опирается на теорему Шаудера о неподвижной точке, на оценки, данные априори Кордесом [1] и обобщение принципа максимума, сформулированного Бицадзе [4] для случая двух независимых переменных.

А. Т. БАРУХА-РЕЙД, О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА . . . . . стр 425—427

В работе приводятся три теоремы, содержанием которых являются необходимые и достаточные условия для того, чтобы последовательность обобщенных случайных величин в сепарабельном пространстве Орлича сходилась соответственно

1. слабо последовательно почти всюду,
2. слабо почти всюду,
3. сильно почти всюду

к обобщенной случайной величине. Указывается на сходство этих теорем с результатами, которые ранее получил О. Ганш.

А. Г. ПАХОЛЬЧИК и Ю. С. СТОДУЛКЕВИЧ, МАГНИТОГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ БЕЗГРАНИЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОРИОЛИСОВЫХ СИЛ . . . . . стр. 429—434

Показано, что критическая (наименьшая) длина волны гармонического возмущения сопровождающего магнитогравитационную неустойчивость безгра-

ничной, однородной вязкой среды, находящейся под действием кориолисовых сил не превышает критической длины волны возмущения в случае невязкой среды.

Г. ШИМАНСКИЙ, РАССЕЯНИЕ K^-p И РЕАКЦИИ $K^-+p\to Y+\pi$ . . . . . стр. 435—439

В наиболее низком приближении Тамма-Данкоффа изучается рассеяние K^--мезонов на протонах и рождение гиперонов, пренебрегая отдачей нуклеона. Предлагаем для YMK скалярный вариант взаимодействия. Результаты для рассеяния K^--мезонов на протонах согласуются с экспериментальными данными, тогда как сечение для рождения, является гораздо меньше экспериментального.

Я. ЛОПУШАНСКИЙ, МОДЕЛЬ РУЙГРОКА-ВАН-ГОВА, ВЫРАЖЕННАЯ В ВИДЕ „ОДЕТЫХ“ ОПЕРАТОРОВ . . . . . стр. 441—447

В работе дается трансформация „одевания” для модели Руйгрока-ван-Гова. При помощи этой трансформации дано выражение на гамильтониан в представлении „одетых” операторов. Отсюда вытекает, что гамильтониан зависит explicite от параметра отрезывания. Приводится решение собственной задачи для системы нуклон-мезон, которое также зависит от параметра отрезывания. Мы нашли притом „призрачное состояние” с отрицательной нормой а также связанное состояние, причем оба принадлежат к одному и тому же значению собственной энергии.

Дискуссия метрики в пространстве Гильберта приводит к заключению, что представление „неодетых” частиц не пригодно для описания системы. По мнению автора, наиболее соответствующим представлением — с физической, а равно и с математической точки зрения — является представление асимптотических стационарных состояний, введенное ван Говом.

Из примера модели Руйгрока-ван-Гова вытекает, что в случае индефинитной метрики нельзя описать систему при помощи представления „неодетых” частиц. Наоборот, она может быть элегантно и просто описана при помощи асимптотических стационарных состояний.

С. БРАМС, СПЕКТРЫ РАМАНА ХЛОРОФОРМА В РАСТВОРАХ С ДИЭТИЛАМИНОМ . . . . . стр. 449—453

В работе исследованы изменения спектральных характеристик (ν, σ, I) линий спектра Рамана, соответствующих колебаниям частоты группы CCl_3 хлороформа в растворе с диэтиламином, в зависимости от состава раствора. Наиболее существенным изменениям подвергается частота ν_2, соответствующая полносимметрическому валентному колебанию C—Cl в результате нового перераспределения электронной плотности на этой связи. Наблюдается новая ли-

ния $\nu_2 = 655\ см^{-1}$. Под влиянием водородной связи, образовавшейся между водородом хлороформа и азотом амина, наступает по всей вероятности, рост отрицательного заряда на атоме угля хлороформа.

На основании измерений интенсивности линий ν_2 и ν_2^* при разных температурах была определена теплота образования комплекса хлороформа с диэтиламином.

Б. МОШИНСКАЯ, СПЕКТР КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЧЕТЫРЕХХЛОРИСТОГО ТИТАНА $TiCl_4$ . . . стр. 455—459

При помощи двупризматического спектрографа „Huet B II" и при применении фотографического метода измерялись частоты, ширины и интенсивности трех линий комбинационного рассеяния $TiCl_4$, а именно: $2\nu_1$, $\nu_2 + \nu_3$ и $\nu_1 + \nu_3$. Констатировано, что линия $\nu_1 + \nu_3$ идентично как и линия ν_3 представляет собой широкую полосу, являющуюся результатом наложения трех линий; аналогично компонентам ν_3', ν_3'', а также $\nu_1 + \nu_4$ — можно здесь выделить компоненты $\nu_1 + \nu_3'$, $\nu_1 + \nu_3''$, а также $2\nu_1 + \nu_4$, причем последние из каждых трех линий представляют собой линии высшего порядка, усиленного вследствие резонанса Ферми. Выражено предположение, что раздвоение линии ν_3 (а в результате и линии $\nu_1 + \nu_3$) является следствием изменения симметрии молекулы $TiCl_4$ с T_d на C_{3v} в результате межмолекулярных воздействий в жидкости. Линии второго порядка в общем шире, чем линии первого порядка. Интенсивности этих линий составляют несколько тысячных интенсивности линии ν_1.